МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова»

И.И. Кулешова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Часть II

Методическое пособие

для студентов дневной формы обучения направления «Экономика»

Рубцовск 2013

УДК 517.9

Кулешова И.И. Математический анализ. Часть II: Методическое пособие для студентов дневной формы обучения направления «Экономика»/ Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2013. -89 с.

Методическое пособие содержит теоретический материал по теории интегрального исчисления, дифференциальных уравнений с достаточным количеством примеров, помогающих самостоятельно изучить рассмотренные темы. Там, где это возможно, раскрывается экономический смысл математических понятий, приводятся простейшие приложения высшей математики в экономике.

Рассмотрено и одобрено на заседании НМС Рубцовского индустриального института
Протокол № 8 от 28.11.13 г.

Рецензент: к.ф. – м.н. В.Г. Дудник

СОДЕРЖАНИЕ

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

1.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении мы решали задачу: по данной функции $f(x)$ найти ее производную. Интегральное исчисление решает обратную задачу: найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x)=f(x)$. Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

Определение. *Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a:b)$, если $\forall x \in (a:b)$ выполняется равенство $F'(x)=f(x)$ или $d(F(x))=f(x)dx$.*

Например, первообразной функции $y=x^2$, $x \in R$, является функция $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$, т.к. $F(x)=\dfrac{1}{3}(x^3)'=\dfrac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2=f(x)$.

Очевидно, что первообразными также будут и функции $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+c, \quad c=const$, т.к. $F'(x)=(\dfrac{x^3}{3}+c)'=x^2=f(x)$.

Т е о р е м а 1. *Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, на $(a:b)$, то множество всех первообразных для функции $f(x)$ задается формулой $F(x)+c, \quad c=const$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, $(F(x))'=F'(x)=f(x)$.

Пусть $\Phi(x)$ - другая, отличная от $F(x)$ первообразная функции $f(x)$, т.е. $\Phi'(x)=f(x)$. Тогда $\forall x \in (a:b)$ имеем $(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$. Это означает, что $\Phi(x)-F(x)=C$, где $c=const \Rightarrow \Phi(x)=F(x)+c$. Что и требовалось доказать.

Определение. *Множество всех первообразных функций $F(x)+c$ для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.* Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x)+c,$$

где $f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение,

x – переменная интегрирования,

$\int$ - знак неопределенного интеграла.

Операция нахождения неопределенного интеграла называется интегрированием.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных кривых» $y = F(x) + c$ (каждому числовому значению c соответствует определенная кривая семейства). График каждой первообразной называется интегральной кривой.

Для всякой ли функции существует неопределенный интеграл? Имеет место следующая теорема, утверждающая, что:

Всякая непрерывная на интервале $(a:b)$ функция имеет на этом промежутке первообразную, а следовательно, и неопределенный интеграл.

1.2. Свойства неопределенного интеграла

Отметим ряд свойств, вытекающих из определения:

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная – подынтегральной функции. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx, \quad (\int f(x)dx)' = f(x)$.

Доказательство:

$$d(\int f(x)dx) = d(F(x)+c) = d(F(x)) + d(c) = F'(x)dx + 0 = f(x)dx$$

$$(\int f(x)dx)' = (F(x)+c)' = F'(x) + c' = F'(x) = f(x).$$

Благодаря этому свойству правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некой функции равен сумме этой функции и производной постоянной $\int d(F(x)) = F(x) + c$.

Доказательство:

$$\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + c.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \quad a \neq 0$.

Доказательство:

$$\int af(x)dx = \int aF'(x)dx = \int (aF(x))'dx = \int d(aF(x)) = aF(x) + c_1 = a(F(x) + \frac{c_1}{a}) =$$

$$= a(F(x) + c) = a\int f(x)dx.$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Доказательство:

Пусть $F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x) \Rightarrow \int (f(x) \pm g(x))dx = \int (F'(x) \pm G'(x))dx =$

$= \int (F(x) \pm G(x))' dx = \int d(F(x) \pm G(x)) = F(x) \pm G(x) + c = (F(x) + c_1) \pm (G(x) + c_2) =$
$= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

5. Инвариантность формулы интегрирования.

Если $\int f(x)dx = F(x) + c$, то $\int f(u)du = F(u) + c$, где $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Пусть x – независимая переменная, $f(x)$ - непрерывная функция и $F(x)$ - ее первообразная. Тогда $\int f(x)dx = F(x) + c$, положим $u = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемая функция. Рассматриваем сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$ в силу инвариантности дифференциала функции.

$$d(F(u)) = F'(u)du = f(u)du \Rightarrow \int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + c.$$

Так, например, из формулы $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$, путем замены x на u, получим $\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c$, в частности, $\int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + c$.

$$\int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + c.$$

1.3. Таблица основных неопределенных интегралов

Пользуясь тем, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, можно получить таблицу основных интегралов, используя таблицу дифференциалов и свойства неопределенного интеграла. Например, $d(\sin x) = \cos x dx \Rightarrow \int \cos x dx = \int d(\sin x) = \cos x + C.$

Интегралы в приводимой ниже таблице называются табличными. В интегральном исчислении нет универсальных правил отыскания первообразных от элементарных функций, как в дифференциальном исчислении. Методы нахождения первообразных функций сводятся к указанию приемов, приводящих данный интеграл к табличному.

1. $\int dx = x + C;$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq 0, n \neq -1;$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
4. $\int e^x dx = e^x + C;$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

7. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg \frac{x}{a} + C;$

7'. $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = arctgx + C;$

8 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

12'. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C;$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C.$

2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

2.1. Метод непосредственного интегрирования

Данный метод заключается в том, что искомый интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример 2.1.

1. $\int ctg^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} \right) dx =$

$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctgx - x + C.$

$$2.\int\frac{x^3+4x+2}{2x}dx\int\left(\frac{x^3}{2x}+\frac{4x}{2x}+\frac{2}{2x}\right)dx=\int\left(\frac{x^2}{2}+2+\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int x^2dx+2\cdot\int dx+\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+2x+\ln x+C.$$

$$3.\int\frac{dx}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}=\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-ctgx+tgx+C.$$

$$4.\int\frac{x^4}{x^2+1}dx=\int\frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx=\int(\ \frac{x^4-1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1})dx=$$

$$=\int\frac{\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{x^2+1}=\int\left(x^2-1\right)dx+arctgx=\frac{x^3}{3}-x+arctgx+C.$$

2.2. Интегрирование методом замены переменной (подстановкой)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования. При этом искомый интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или приводящимся к нему.

Пусть требуется вычислить $\int f(x)dx$. Сделаем замену $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$- функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx=\varphi'(t)dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем формулу интегрирования подстановкой.

$$\left[\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\right].$$

После нахождения интеграла в правой части следует перейти от новой переменной t назад к переменной x.

Пример 2.2.

$$\int e^{\frac{x}{4}}dx=\left[\begin{array}{l}\frac{x}{4}=t\\ d(\frac{x}{4})=dt\\ \frac{dx}{4}=dt\\ dx=4dt\end{array}\right]=\int e^t\cdot 4dt=4\cdot\int e^t dt=4e^t+C=4e^{\frac{x}{4}}+C.$$

Пимр 2.3.

$$\int x\cdot\sqrt{x^2-3}dx=\begin{bmatrix} x^2-3=t \\ d(x^2-3)=dt \\ 2xdx=dt \\ xdx=\dfrac{dt}{2}\end{bmatrix}=\int\sqrt{t}\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\cdot\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{(x^2-3)^{\frac{3}{2}}}{3}+C.$$

Пример 2.4.

$$\int\frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{bmatrix} \arcsin x=t \\ d(\arcsin x)=dt \\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt\end{bmatrix}=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{\arcsin^4 x}{4}+c.$$

2.3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u=u(x), v=v(x)$ - функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(u\cdot v)=vdu+udv$. Интегрируя обе части равенства, получим

$$\int d(uv)=\int vdu+\int udv,$$

$$uv=\int vdu+\int udv,$$

$\left[\int udv=uv-\int vdu\right]$ - формула интегрирования по частям.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей *u* и *dv*, затем после нахождения *v* и *du* используется формула интегрирования по частям. Иногда формулу приходится использовать несколько раз.

$$\int \underset{\breve{u}}{f(x)}\underset{d\breve{v}}{\varphi(x)dx}=\begin{bmatrix} u=f(x) \;\; dv=\varphi(x)dx \\ du=f'(x)dx \;\; v=\int\varphi(x)dx\end{bmatrix}.$$

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. $\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\sin kxdx, \int P(x)\cos kxdx, \int P(x)a^{kx}dx$, где P($x$) – многочлен, k – число, u=P(x) за dv – все остальные сомножители.

2. $\int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx, \int P(x)arctgxdx, \int P(x)arcctgxdx,$ $\int P(x)\ln xdx, P(x)dx=dv,$ за u – все остальные множители.

3. $\int e^{ax}\cos bxdx, \int e^{ax}\sin bxdx, u=e^{ax}$ или u=cosbx.

Пример 2.5.

$$\int (2x+1)\cdot e^{3x}dx = \left[\begin{array}{ll} u = 2x+1, & dv = e^{3x}dx \\ du = 2dx, & v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x) = \frac{e^{3x}}{3} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{(2x+1)\cdot e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int e^{3x}dx = \frac{(2x+1)\cdot e^{3x}}{3} - \frac{2}{9}\cdot e^{3x} + C.$$

Пример 2.6.

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x, & dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ du = \frac{dx}{x}, & v = \int x^{\frac{-1}{2}}dx = 2\sqrt{x} \end{array}\right] = 2\sqrt{x}\cdot \ln x - 2\int \frac{\sqrt{x}dx}{x} =$$

$$= 2\sqrt{x}\cdot \ln x - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\cdot \ln x - 4\sqrt{x} + C.$$

Пример 2.7.

$$\int x^2\cdot 3^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^2, & dv = 3^x dx \\ du = 2xdx & v = \frac{3^x}{\ln 3} \end{array}\right] = \frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3}\int x\cdot 3^x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x, & dv = 3^x dx \\ du = dx, & v = \frac{3^x}{\ln 3} \end{array}\right] = \frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3}\cdot\left(\frac{x\cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^x dx\right) =$$

$$= \frac{x^2\cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{2x\cdot 3^x}{\ln^2 3} + \frac{2\cdot 3^x}{\ln^3 3} + C.$$

Пример 2.8.

$$\int arctgxdx = \left[\begin{array}{ll} u = arctgx, & dv = dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, & v = x \end{array}\right] = x\cdot arctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ d(1+x^2) = dt \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{array}\right] = x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\cdot\int \frac{dt}{t} = x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\cdot \ln|t| =$$

$$= x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\cdot \ln\left(1+x^2\right) + C.$$

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

3.1. Понятие о рациональных функциях

Формула вида

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n,$

$n \in N,\ a_n$ - постоянные коэффициенты, называется многочленом или целой рациональной функцией.

Т е о р е м а 1. Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде $P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$, где $x_1, x_2, ...x_n$ - корни многочлена, a_0 - коэффициент при x^n. Множители $x - x_i$ в разложении называются линейными.

Если в разложении какой-либо корень встретится *k* раз, то он называется корнем кратности *k*.

Т е о р е м а 2. Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.

Например, $ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3 - 3x^2 + 1$, тогда $a = 1, b = -3, c = 0, d = 1.$

Т е о р е м а 3. Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т.е. многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}...(x - x_r)^{k_r}(a^2 + p_1x + q_1)^{s_1}...(a^2 + p_mx + q_m)^{s_m}.$$

При этом $k_1 + k_2 + ...k_r + 2(s_1 + s_2 + ...s_m) = n,$ все квадратные трехчлены не имеют действительных корней.

Например:

1. $x^4 - 1 = (x + 1)\cdot(x - 1)\cdot(x^2 + 1)$.
2. $x^3 - 16x = x\cdot(x - 4)\cdot(x + 4)$.

3.1.1. Дробно-рациональная функция

Определение. *Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух многочленов, т.е.*

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $P_m(x)$ - многочлен степени m, $Q_n(x)$ - многочлен степени *n*.

Определение. *Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя, m<n, в противном случае $(m \geq n)$ дробь называется неправильной.*

Всякую неправильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можно путем деления числителя на знаменатель представить в виде суммы многочлена L(x) и правильной рациональной дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, т.е. $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$.

Пример 3.1. Представить неправильную дробь $\dfrac{x^4 - 5x + 9}{x+2}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 5x + 9 & x+2 \\
\cline{2-2}
\underline{x^4 + 2x^3} & x^3 - 2x^2 + 4x - 13 \\
\quad -2x^3 - 5x + 9 & \\
\quad \underline{-2x^3 - 4x^2} & \\
\qquad\quad 4x^2 - 5x + 9 & \\
\qquad\quad \underline{4x^2 + 8x} & \\
\qquad\qquad\quad -13x + 9 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-13x - 26} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 35 &
\end{array}
$$

$$\frac{x^4 - 5x + 9}{x+2} = x^3 - 2x^2 + 4x - 13 + \frac{35}{x+2}.$$

3.1.2. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование

Правильные рациональные дроби вида:

I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{A}{x-a}k \ (k \geq 2)$;

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q} \ (D<0)$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} \ (k \geq 2)$, (D<0),

где A, M, N, a, p, q – действительные числа, называют простейшими рациональными дробями I, II, III, IV типов.

Т е о р е м а 4 **.** Всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \ldots (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \ldots (x^2+p_mx+q_m)^{s_m},$$

можно представить в виде суммы простейших дробей следующим образом:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} +$$
$$+ \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \ldots + \frac{C_{s_1} x + D_{s_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}} + \tag{3.1}$$
$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_m x + q_m} + \ldots + \frac{M_{s_m} x + N_{s_n}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_m}},$$
где $A_1,\ldots B_1,\ldots,$ - действительные коэффициенты.

Пример 3.2.

а) $\dfrac{x^2+4}{(x-2)\cdot(x-3)^3} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3} + \dfrac{C}{(x-3)^2} + \dfrac{D}{(x-3)^3}$;

б) $\dfrac{x^3+1}{x^2\cdot(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$;

в) $\dfrac{7x^2+8x+9}{(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+x+1)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+x+1} + \dfrac{Fx+N}{(x^2+x+1)^2}$.

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A_1, A_2,\ldots$ в равенстве (3.1) можно применить метод сравнения коэффициентов. Метод заключается в следующем.

1. В правой части равенства (3.1) приведем дроби к общему знаменателю Q(x), в результате получим тождество $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{S(x)}{Q(x)}$. S($x$) – многочлен с неопределенными коэффициентами.

2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители - $P(x) \equiv S(x)$.

3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (по теореме 2), в обеих частях равенства получим систему линейных уравнений, из которой определим искомые коэффициенты $A_1, A_2,\ldots$

Пример 3.3. Представить дробь в виде простейших

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\cdot(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5} = \frac{A\cdot(x^2-2x+5)+(Bx+C)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x^2-2x+5)} =$$
$$= \frac{Ax^2-2Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)\cdot(x^2-2x+5)} = \frac{x^2\cdot(A+B)+x\cdot(-2A-B+C)+5A-C}{(x-1)\cdot(x^2-2x+5)}.$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B+C=-3; \\ 5A-C=-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} B=2-A \\ -2A-B+C=-3; \\ C=5A+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} B=2-A \\ -2A-2+A+5A+3=-3; \\ C=5A+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 2 - A \\ 4A = -4 \\ C = 5A + 3 \end{cases}; \qquad \begin{cases} B = 3 \\ A = -1. \\ C = -2 \end{cases}$$

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)\cdot(x^2 - 2x + 5)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2 - 2x + 5}.$$

3.1.3. Интегрирование простейших рациональных дробей

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = \begin{bmatrix} x - a = t \\ d(x-a) = dt \end{bmatrix} = \ln|x-a| + C.$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$

Выделив в знаменателе полный квадрат, получим

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q}dx = \int \frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})}dx,$$ причем $a^2 - \frac{p^2}{4} > 0.$

Далее делаем подстановку $x + \frac{p}{2} = t,\ dx = dt.$

$$\int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+a^2}dt = \int \frac{Mt - M\cdot\frac{p}{2}+N}{t^2+a^2}dt = M\int\frac{tdt}{t^2+a^2} + (N - M\cdot\frac{p}{2})\int\frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + (N - M\cdot\frac{p}{2})\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a} = \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) +$$

$$+(N - M\cdot\frac{p}{2})\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a} + C == \frac{M}{2}\ln((x+\frac{p}{2})^2 + a^2) + (N - M\cdot\frac{p}{2})\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C.$$

Пример 3.4. $\int\frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx = \int\frac{3x+1}{x^2+2x+1-1+10}dx = \int\frac{3x+1}{(x+1)^2+9}dx =$

$$=\begin{bmatrix} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{bmatrix}=\int\frac{3(t-1)+1}{t^2+9}dt=\int\frac{3t-2}{t^2+9}dt=3\int\frac{tdt}{t^2+9}-2\int\frac{dt}{t^2+9}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(t^2+9)}{t^2+9}-\frac{2}{3}arctg\frac{t}{3}=\frac{3}{2}\ln\left|t^2+9\right|-\frac{2}{3}arctg\frac{t}{3}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|(x+1)^2+9\right|-\frac{2}{3}arctg\frac{x+1}{3}+C.$$

IV. $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},\ k\geq 2,\ q-\frac{p^2}{4}>0.$

Данный интеграл подстановкой $x+\frac{p}{2}=t$ сводится к сумме двух интегралов:

$$M\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}+(N-\frac{Mp}{2})\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k},\ a^2=q-\frac{p^2}{4}.$$

Вычисляем первый интеграл

$$\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=\begin{bmatrix} d(t^2+a^2)=2tdt \\ tdt=\dfrac{d(t^2+a^2)}{2} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1}+C_1.$$

Вычисляем второй интеграл

$$J_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}-\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k}\right)=\frac{1}{a^2}\left(J_{k-1}-\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k}\right).$$

К последнему интегралу применим формулу интегрирования по частям

$$\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}=\begin{bmatrix} u=t & dv=\dfrac{tdt}{(t^2+a^2)^k} \\ du=dt & v=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(t^2+a^2)^{1-k}}{1-k} \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}.$$

$$J_k=\frac{1}{a^2}\left(J_{k-1}-\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}+\frac{1}{2(1-k)}J_{k-1}\right),$$

$$J_k=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2(1-k)}J_{k-1}-\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\right).$$

Полученная формула дает возможность найти интеграл J_k для любого $k>1$.

$$J_3=\int\frac{dt}{(t^2+1)^3},\ a=1,\ k=3.$$

$$J_1=\int\frac{dt}{t^2+1}=arctgt+C.$$

$$I_2=\frac{1}{2}I_1+\frac{t}{2(t^2+1)}=\frac{1}{2}arctgt+\frac{t}{2(t^2+1)}+C.$$

$$J_3=\frac{3}{4}J_2+\frac{t}{4(t^2+1)^2}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}arctgt+\frac{t}{2(t^2+1)}\right)+\frac{t}{4(t^2+1)^2}+C.$$

3.1.4. Интегрирование рациональных дробей

Правила интегрирования рациональных дробей.

1. Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби (разделить числитель на знаменатель).

2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представим ее в виде суммы простейших рациональных дробей.

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример 3.5.

1. $\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=$

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^5+2x^3+4x+4 & x^4+2x^3+2x^2 \\
\cline{3-3}
 & x^5+2x^4+2x^3 & x-2 \\
\cline{2-2}
- & -2x^4+4x+4 & \\
 & -2x^4-4x^3-4x^2 & \\
\cline{2-2}
 & 4x^3+4x^2+4x+4 &
\end{array}$$

$$=\int(x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2})dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=$$

$$=\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}=$$

$$=\frac{Ax(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+2x+2)}=$$

$$=\frac{Ax^3+2Ax^2+2Ax+Bx^2+2Bx+2B+Cx^3+Dx^2}{x^2(x^2+2x+2)}=$$

$$=\frac{x^3(A+C)+x^2(2A+B+D)+x(2A+2B)+2B}{x^2(x^2+2x+2)}.$$

Найдем коэффициенты *A, B, C*, Д из системы:

$$\begin{cases} A+C=4 \\ 2A+B+D=4 \\ 2A+2B=4 \\ 2B=4 \end{cases} \quad \begin{cases} A+C=4 \\ 2A+2+D=4 \\ A+2=2 \\ B=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=4 \\ D=2 \\ A=0 \\ D=2 \end{cases}$$

Возвращаемся в решение

$$=\frac{x^2}{2}+2x+2\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{4x+2}{x^2+2x+2}dx=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{2}{x}+\int\frac{4x+2}{x^2+2x+1+1}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+\int\frac{4x+2}{(x+1)^2+1}dx=\begin{bmatrix} x+1=t \\ x+t-1 \\ dx=dt \end{bmatrix}=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+\int\frac{4(t-1)+2}{t^2+1}dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+\int\frac{4t-2}{t^2+1}dt=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+2\int\frac{2tdt}{t^2+1}-2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+2\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1}-2arctgt=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+\ln\left(t^2+1\right)-2arctgt+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x}+\ln\left((x+1)^2+1\right)-2arctg(x+1)+C.$$

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

4.1. Универсальная подстановка

Функцию с переменными sin$x$ и cos$x$, над которыми выполняются рациональные действия сложение, вычитание, умножение, деление, принято обозначать $R(\cos x, \sin x)$, где R – знак рациональной функции.

Вычисление неопределенных интегралов типа $\int R(\cos x,\sin x)dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $tg\,\frac{x}{2}=t$, которая называется универсальной.

Действительно,

$$\sin x=\frac{\sin x}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}\,;$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x=2arctgt;\ dx\frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Этот способ весьма громоздкий, но всегда приводит к результату. Например:

$$\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}=\begin{bmatrix} tg\frac{x}{2}=t \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{bmatrix}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2+2t+1+t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{2dt}{2t^2+2t+4}=\int\frac{dt}{t^2+t+2}=\int\frac{dt}{t^2+t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2}=\int\frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}=$$

$$=arctg\frac{2(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{7}}+C=arctg\frac{2(tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2})}{\sqrt{7}}+C.$$

Если $\int R(\cos^{2n}x;\sin^{2m}x)dx$, т. е. функции синуса и косинуса входят в интеграл в четных степенях, то применяют подстановку $tgx=t$, тогда

$$\cos^2 x=\frac{\cos^2 x}{1}=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{1+t^2};$$

$$\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{1}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{t^2}{1+t^2};$$

$$x=arctgt,dx=\frac{dt}{1+t^2},$$

$$\int R(\cos^{2n} x;\sin^{2m} x)dx = \int R(\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^n;\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^m)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 4.1.

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \begin{bmatrix} tgx = t \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+2t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\frac{1}{2}+t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} arctg\sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\sqrt{2}tgx + C.$$

4.2. Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Для нахождения интеграла применяют следующие приемы:

a) если m - целое положительное нечетное число, а n- любое число, то $\sin^m x = \sin^{m-1} x \cdot \sin x$ и $\cos x = t, d(\cos x) = -dt;$

b) если n - целое положительное нечетное число, а m - любое число, то $\cos^n x = \cos^{n-1} x \cdot \cos x$ и $\sin x = t, d(\sin x) = dt;$

c) если n и m - целые положительные четные числа, то применяют формулы понижения степени $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}; \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2};$

d) если $m+n$ - четное отрицательное целое число, то применяется подстановка $tgx = t.$

Пример 4.2.

а) $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx = \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos x dx = \int \sin^4 x \cdot \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x dx =$

$$= \begin{bmatrix} \sin x = t \\ d(\sin x) = dt \\ \cos x dx = dt \end{bmatrix} = \int t^4 \cdot \left(1-t^2\right)^2 dt = \int t^4 \cdot \left(1-2t+t^2\right)dt =$$

$$= \int (t^4 - 2t^5 + t^6)dt = \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^6}{6} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^6 x}{3} + \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

б) $\int \sin^4 3x \cdot \cos^2 3x dx = \int \left(\dfrac{1-\cos 6x}{2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1+\cos 6x}{2}\right) dx =$

$$=\frac{1}{8}\int(1-\cos 6x)\cdot(1+\cos 6x)\cdot(1-\cos 6x)dx=\frac{1}{8}\int\left(1-\cos^2 6x\right)\cdot(1-\cos 6x)dx=$$
$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 6x\cdot(1-\cos 6x)dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 6xdx-\frac{1}{8}\int\sin^2 6x\cdot\cos 6xdx=$$
$$=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1-\cos 12x}{2}\right)dx-\frac{1}{8}\int\sin^2 6x\cdot\frac{d(\sin 6x)}{6}=\frac{1}{16}\left(x-\frac{\sin 12x}{12}\right)-\frac{1}{48}\frac{\sin^3 6x}{3}+C.$$

в)

$$\int\frac{dx}{\cos x\cdot\sin^3 x}=\left[\begin{array}{l} tgx=t \\ \cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \sin x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right]=\int\frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|tgx|+C.$$

4.3. Интегралы типа $\int\sin\alpha x\cdot\cos\beta xdx;\int\sin\alpha x\cdot\sin\beta xdx;\int\cos\alpha x\cdot\cos\beta xdx$ вычисляются с помощью формул тригонометрии

$$\sin\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha x-\beta x)+\sin(\alpha x+\beta x)\right);$$
$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha x-\beta x)+\cos(\alpha x+\beta x)\right);$$
$$\sin\alpha x\cdot\sin\beta x=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha x-\beta x)-\cos(\alpha x+\beta x)\right).$$

Пример 4.3.

$$\int\sin 5x\cdot\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int(\sin 3x+\sin 7x)dx=\frac{1}{6}\int\sin 3xd(3x)+\frac{1}{14}\int\sin 7xd(7x)=$$
$$=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{14}\cos 7x+C.$$

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

5.1. Квадратичные иррациональности

Интегралы типа $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx$ называют неопределенными интегралами от квадратичных иррациональностей. Их можно найти следующим образом: под радикалом выделить полный квадрат

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

и сделать подстановку $x+\dfrac{b}{2a}=t$.

Пример 5.1.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}}}=$$

а)

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}}==\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}\right|+C.$$

б) $$\int\frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}}dx=\int\frac{x+4}{\sqrt{-\left(x^2+2x-6\right)}}dx=\int\frac{x+4}{\sqrt{-\left(x^2+2x+1-1-6\right)}}dx=$$

$$=\int\frac{x+4}{\sqrt{-\left(\left(x+1\right)^2-7\right)}}dx=\int\frac{x+4}{\sqrt{7-\left(x+1\right)^2}}dx\left[\begin{matrix}x+1=t\\ x=t-1\\ dx=dt\end{matrix}\right]=\int\frac{t-1+4}{\sqrt{7-t^2}}dt=$$

$$=\int\frac{tdt}{\sqrt{7-t^2}}+3\int\frac{dt}{\sqrt{7-t^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(7-t^2\right)}{\sqrt{7-t^2}}+3\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(7-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(7-t^2\right)+3\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}=-\frac{1}{2}\frac{\left(7-t^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+$$

$$+3\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}+C=-\sqrt{7-\left(x+1\right)^2}+3\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}}+C.$$

Пример 5.2.

$$\int\sqrt{x^2+2x+2}dx=\int\sqrt{x^2+2x+1+1}dx=\int\sqrt{\left(x+1\right)^2+1}dx=$$

а)

$$=\left[\begin{matrix}x+1=t\\ dx=dt\end{matrix}\right]=\int\sqrt{t^2+1}dt=\left[\begin{matrix}v=\sqrt{t^2+1} & du=dt\\ dv=\frac{2tdt}{2\sqrt{t^2+1}} & u=t\end{matrix}\right]=t\cdot\sqrt{t^2+1}-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=t\cdot\sqrt{t^2+1}-\int\frac{t^2+1-1}{\sqrt{t^2+1}}dt=t\cdot\sqrt{t^2+1}-\int\frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+1}}dt+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=t\cdot\sqrt{t^2+1}-\int\sqrt{t^2+1}dt+\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|;$$

б)

$$\int\sqrt{t^2+1}dt = t\cdot\sqrt{t^2+1}+\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| = \int\sqrt{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\left(t\cdot\sqrt{t^2+1}+\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right)+C$$

$$\int\sqrt{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\left((x+1)\cdot\sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|\right)+C.$$

Интегралы типа $\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени *n*, можно вычислить, пользуясь следующей формулой:

$$\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $Q_{n-1}(x)$ - многочлен степени *n*-1 с неопределенными коэффициентами,

λ - также неопределенный коэффициент.

Все неопределенные коэффициенты из тождества, получаемого дифференцированием обеих частей равенства.

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left(\ Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\ \right)'+\frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Пример 5.3. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} = (Ax+B)\cdot\sqrt{1-2x-x^2}+\lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$;

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} = A\cdot\sqrt{1-2x-x^2}+\frac{(Ax+B)\cdot(-2-2x)}{2\sqrt{1-2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}};$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \frac{A\cdot\left(1-2x-x^2\right)+(Ax+B)\cdot(-1-x)+\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}};$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \frac{A-2Ax-Ax^2-Ax-Ax^2-B-Bx+\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}};$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \frac{-2Ax^2+x(-3A-B)+A-B+\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

$$\begin{cases}-2A=1\\ -3A-B=0\\ A-B+\lambda=0\end{cases}\quad\begin{cases}A=\frac{-1}{2}\\ B=\frac{3}{2}\\ \lambda=2\end{cases}$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \left(\frac{-1}{2}x + \frac{3}{2} \right) \cdot \sqrt{1-2x-x^2} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) \cdot \sqrt{1-2x-x^2} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2+2x-1\right)}} = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) \times$$

$$\times \sqrt{1-2x-x^2} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2+2x+1-1-1\right)}} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) \cdot \sqrt{1-2x-x^2} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(\left(x+1\right)^2-2\right)}} = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) \cdot \sqrt{1-2x-x^2} +$$

$$+ \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{2-\left(x+1\right)^2}} = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) \cdot \sqrt{1-2x-x^2} + \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}.$$

Интегралы типа $\int \frac{Mx+N}{\left(x-\alpha\right)^n \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ находят, используя подстановку $x-\alpha = \frac{1}{t};\ \ x = \frac{1}{t}+\alpha;\ \ dx = -\frac{dt}{t^2}.$

Пример 5.4.

$$\int \frac{dx}{\left(x+1\right)\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{\left(x+1\right)\sqrt{x^2+2x+1+1}} = \int \frac{dx}{\left(x+1\right)\sqrt{\left(x+1\right)^2+1}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} x+1 = \dfrac{1}{t} \\ dx = \dfrac{-dt}{t^2} \end{array} \right] = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = -\int \frac{\frac{dt}{t}}{\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln\left| t+\sqrt{1+t^2} \right| + C =$$

$$= -\ln\left| \frac{1}{x+1} + \sqrt{1+\frac{1}{(x+1)^2}} \right| + C.$$

5.2. Дробно-линейная подстановка

Интегралы типа

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{\delta}{\gamma}} \right)dx,$$ где a,b,c,d – действительные числа,

$\alpha,\beta,\delta,\gamma$ – натуральные числа, сводятся к интегралу от рациональной функции путем подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей $\frac{\alpha}{\beta},\ldots,\frac{\delta}{\gamma}$.

Пример 5.5.

$$1.\int \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-x}dx = \begin{bmatrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{(t-1)2tdt}{2t-t^2} = \int \frac{2t\left(t-1\right)dt}{t\left(2-t\right)} = 2\int \frac{t-1}{2-t}dt = -2\int \frac{t-1}{t-2}dt =$$

$$= -2\int \frac{t-2+1}{t-2}dt = -2\int \frac{t-2}{t-2}dt - 2\int \frac{dt}{t-2} = -2t - 2\ln\left|t-2\right| + C = -2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x}-2\right| + C.$$

$$2.\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt{x+2}} = \begin{bmatrix} x+2 = t^6 \\ dx = 6t^5dt \end{bmatrix} = 6\int \frac{t^5dt}{t^2-t^3} = 6\int \frac{t^5dt}{t^2\left(1-t\right)} = 6\int \frac{t^3dt}{1-t} = -6\int \frac{t^3dt}{t-1} =$$

$$= -6\int \frac{t^3-1+1}{t-1}dt = -6\int \frac{t^3-1}{t-1}dt - 6\int \frac{dt}{t-1} = -6\int \frac{\left(t-1\right)\cdot\left(t^2+t+1\right)}{t-1}dt - 6\ln\left|t-1\right| =$$

$$= -6\int\left(t^2+t+1\right)dt - 6\ln\left|t-1\right| = -6\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t\right) - 6\ln\left|t-1\right| + C =$$

$$= -2\sqrt{x+2} - 3\sqrt[3]{x+2} - 6\sqrt[6]{x+2} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x+2}-1\right| + C.$$

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{(1-x)^2} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{x-1} = t^3 \\ x+1 = t^3\left(x-1\right) \\ x+1 = t^3x - t^3 \\ x - t^3x = -t^3-1 \\ x\left(1-t^3\right) = -t^3-1 \\ x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1} \\ dx = \dfrac{3t^2\left(t^3-1\right)-3t^2\left(t^3+1\right)}{\left(t^3-1\right)^2}dt \\ dx = \dfrac{3t^2\left(t^3-1-t^3-1\right)}{(t^3-1)^2}dt \\ dx = \dfrac{-6t^2}{\left(t^3-1\right)^2}dt \end{array}\right] = \int t\cdot\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\cdot\frac{dt}{\left(1-\dfrac{t^3+1}{t^3-1}\right)^2} =$$

$$= -6\int \frac{t^3}{\left(t^3-1\right)^2}\cdot\frac{\left(t^3-1\right)^2dt}{\left(t^3-1-t^3-1\right)^2} = -6\int \frac{t^3}{4}dt = -\frac{3}{2}\cdot\frac{t^4}{4} + C = -\frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4} + C.$$

5.3. Тригонометрические подстановки

Интегралы типа $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx; \int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx; \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, с помощью следующих тригонометрических подстановок:

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\begin{bmatrix} x=a\sin t \\ dx=a\cos t dt \end{bmatrix};$$

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx=\begin{bmatrix} x=a tg t \\ dx=\dfrac{a dt}{\cos^2 t} \end{bmatrix};$$

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=\begin{bmatrix} x=\dfrac{a}{\cos t} \\ dx=\dfrac{a\sin t dt}{\cos^2 t} \end{bmatrix}.$$

Пример 5.6.

$$\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx=\begin{bmatrix} x=2\sin t \\ dx=2\cos t dt \end{bmatrix}=\int\frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt}{4\sin^2 t}=\int\frac{2\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt}{4\sin^2 t}=$$

$$=\int\frac{\sqrt{\cos^2 t}\cdot\cos t dt}{\sin^2 t}=\int\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\frac{dt}{\sin^2 t}-\int dt=-ctg t-t+C=$$

$$=-ctg\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)-\arcsin\frac{x}{2}+C.$$

Интегралы типа $\int R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ приводятся к интегралам $\int R\left(t;\sqrt{a^2-t^2}\right)dt, \int R\left(t;\sqrt{a^2+t^2}\right)dt, \int R\left(t;\sqrt{t^2-a^2}\right)dt$ выделением полного квадрата под знаком корня и введением замены $x+\dfrac{b}{2a}=t$.

Пример 5.7. $\int\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}dx=\int\dfrac{\sqrt{x^2+2x+1-1-3}}{(x+1)^3}dx=\int\dfrac{\sqrt{(x+1)^2-4}}{(x+1)^3}dx=$

$$=\begin{bmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{bmatrix}=\int\frac{\sqrt{t^2-4}}{t^3}dt=\begin{bmatrix} t=\dfrac{2}{\cos z} \\ dt=\dfrac{2\sin z}{\cos^2 z}dz \end{bmatrix}=\int\frac{\sqrt{\dfrac{4}{\cos^2 z}-4}}{\dfrac{8}{\cos^3 z}}\cdot\frac{2\sin z}{\cos^2 z}dz=$$

$$=\int\frac{2\sqrt{\dfrac{1-\cos^2 z}{\cos^2 z}}}{\dfrac{4}{\cos z}}\cdot\sin z dz=\frac{1}{2}\int\frac{\dfrac{\sin^2 z}{\cos z}}{\dfrac{1}{\cos z}}dz=\frac{1}{2}\int\sin^2 z dz=\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos 2z}{2}dz=$$

$$=\frac{1}{4}\left(z-\frac{\sin 2z}{2}\right)+C=\frac{1}{4}\left(\arccos\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2}\sin\left(\arccos\frac{2}{x+1}\right)\right)+C.$$

6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

6.1. Задачи, приводящие к определенному интегралу

6.1.1. Задача о площади

Поставим задачу о вычислении площади плоской фигуры *K*, ограниченной произвольной замкнутой линией (рис. 6.1).

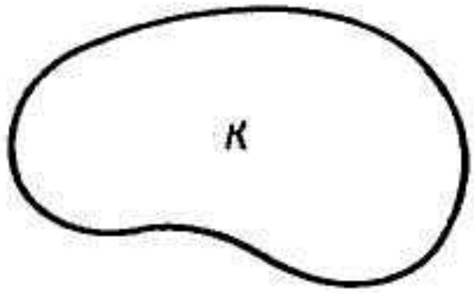


Рис. 6.1

Вначале рассмотрим частный случай, когда фигура *K* лежит в плоскости *Oxy* и ограничена кривой *AB*, отрезком *CD* оси абсцисс и двумя прямыми *CA* и *DB*, проведенными в концах отрезка параллельно оси *Oy* (рис. 6.2). Назовем эту

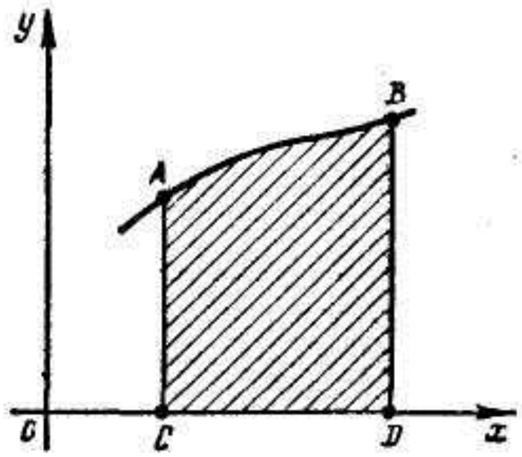


Рис. 6.2

фигуру *криволинейной трапецией*, а отрезок *CD* – её основанием. Предположим, что точки *C* и *D* имеют соответственно абсциссы a и b $(b>a)$ и что кривая *AB* относительно выбранной системы координат задана уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ - непрерывная и положительная на интервале $[a,\ b]$ функция.

Разобьем интервал $[a,\ b]$ на части с помощью $n-1$ точек деления с абсциссами $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1}$. Кроме того, для единообразия записи положим $a = x_0$ и $b = x_n$. Точки деления разбивают интервал $[a,\ b]$ на n малых интервалов:

$$[x_0,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],\ \ldots,[x_{i-1},\ x_i],\ \ldots,[x_{n-1},\ x_n].$$

Проведя через точки деления прямые, параллельные оси Oy, мы разобьем криволинейную трапецию на n малых криволинейных трапеций (рис. 6.3). Ясно, что площадь всей криволинейной трапеции равна сумме площадей всех n малых криволинейных трапеций. Поэтому если обозначить через S площадь всей криволинейной трапеции, а через ΔS_i - площадь малой криволинейной трапеции с основанием $[x_{i-1},\ x_i]$ (i принимает значение от 1 до n), то

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_i + \ldots + \Delta S_n, \qquad (6.1)$$

или в более короткой записи,

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i\ , \qquad (6.1')$$

где буква $\sum$ (сигма) есть знак суммы, а символ $\sum\limits_{i=1}^{n}$ означает, что суммируются n слагаемых при изменении индекса i от 1 до n.

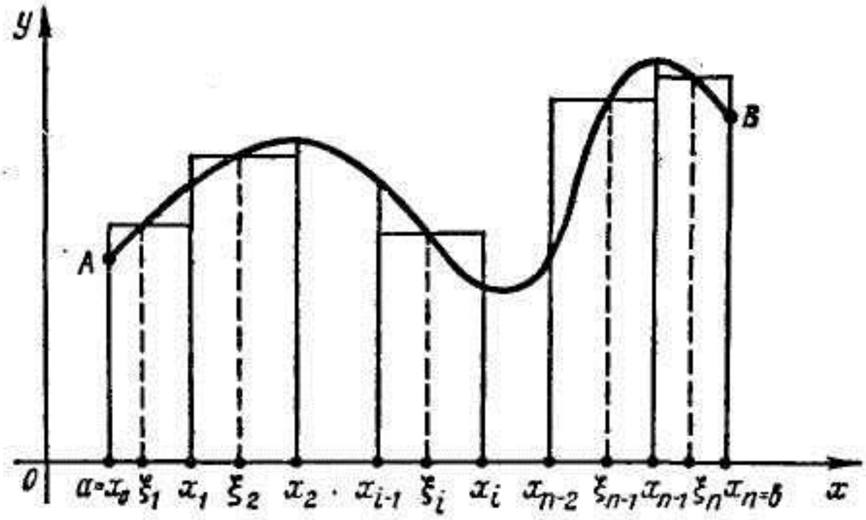


Рис. 6.3

Но вычислить площадь этих малых трапеций так же трудно, как и площадь большой. Поэтому мы поступим следующим образом: в каждом из маленьких интервалов $[x_{i-1},\ x_i]$ выберем произвольную точку $\xi_i \left(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i\right)$ и построим в этой точке ординату кривой $f(\xi_i)$ (рис. 6.3 и 6.4).

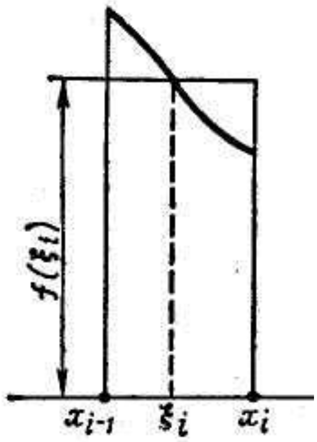


Рис. 6.4

Заменим теперь каждую малую криволинейную трапецию с основанием $[x_{i-1},\ x_i]$ (i = 1, 2, …, n) прямоугольником с тем же основанием и с высотой, равной $f(\xi_i)$ (см. рис. 6.4).

Площадь такого прямоугольника равна $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, так как $x_i - x_{i-1}$ - длина малого интервала $[x_{i-1},\ x_i]$. Приняв площадь этого прямоугольника за приближенное значение площади малой криволинейной трапеции, получим

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{6.2}$$

Заменив площадь каждой малой криволинейной трапеции площадью прямоугольника с тем же основанием, но с высотой, равной ординате кривой в некоторой произвольной точке основания, получим ступенчатую фигуру, показанную на рисунке 6.3. Площадь этой ступенчатой фигуры дает приближенное значение площади криволинейной трапеции. Поэтому для площади S криволинейной трапеции получаем следующее приближенное равенство:

$$S \approx f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}), \tag{6.3}$$

или в более короткой записи,

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{6.3'}$$

Обозначим через λ наибольшую из длин малых интервалов:

$$\lambda = \text{наиб.}\ \{(x_1 - x_0);\ (x_2 - x_1);\ \ldots;\ (x_n - x_{n-1})\}.$$

С уменьшением λ точность приближенной формулы (6.3’) увеличивается. Поэтому вполне естественно за точное значение площади S криволинейной трапеции принять предел площади ступенчатых фигур при условии, что наибольшая длина λ малых интервалов стремится к нулю. Таким образом,

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{6.4}$$

Если, кроме того, обозначить $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, то формула (1.4) примет следующий окончательный вид:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i . \qquad (6.4')$$

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции привело нас к нахождению предела некоторой суммы вида (6.4').

Возвращаясь к задаче о вычислении площади плоской области K, ограниченной произвольной замкнутой линией, заметим, что эта задача может быть сведена к задаче нахождения криволинейных трапеций. Например, на рис. 6.5 площадь области, ограниченной контуром $AnBmA$, можно найти как разность площадей криволинейных трапеций $A_1B_1BmAA_1$ и $A_1B_1BnAA_1$.

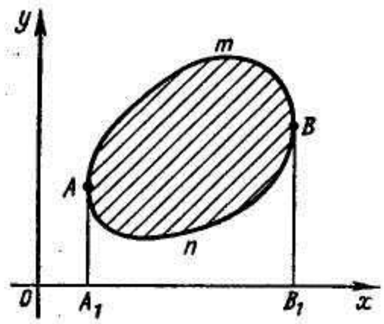


Рис. 6.5

6.1.2. Задача о работе переменной силы

Если материальная точка под действием силы $\boldsymbol{F}$, не меняющейся ни по величине, ни по направлению, переместилась на расстояние l в направлении действия силы, то работа силы, как известно из механики, равна произведению величины силы F на перемещение l, т.е.

$$E = Fl . \qquad (1.5)$$

Рассмотрим теперь случай, когда сила $\boldsymbol{F}$ меняется по своей численной величине, хотя и сохраняет постоянное направление. Пусть под действием этой силы материальная точка перемещается по прямой, направленной вдоль линии действия силы. Поставим задачу о вычислении работы силы $\boldsymbol{F}$.

Примем прямую, вдоль которой перемещается материальная точка, за ось Ox. Пусть начальная и конечная точки пути имеют соответственно абсциссы a и b $(a < b)$. В каждой точке интервала $[a,\ b]$ величина силы имеет определенное значение, т.е. является некоторой функцией абсциссы: $F = f(x)$. Эту функцию будем считать непрерывной. Разобьем сегмент $[a,\ b]$ между начальной и конечной точками пути на n малых интервалов (рис. 6.6) $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., ..., $[x_{i-1}, x_i]$, ...,$[x_{n-1}, x_n]$ (здесь $a = x_0$, $b = x_n$), длины которых соответственно равны

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1,\ ...,\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ ...,\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

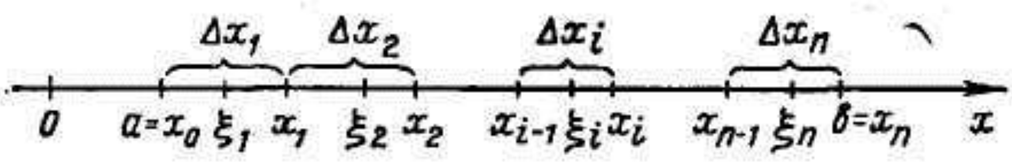


Рис.6.6

Работа на всем пути $[a,\ b]$ равна сумме работ на всех малых участках пути. Обозначив искомую работу на всем пути через *E*, а работу на малом участке $[x_{i-1}, x_i]$ - через ΔE_i, имеем

$$E = \sum_{i=1}^{n} \Delta E_i .$$

Но определить работу на малом участке так же трудно, как на всем пути, так как сила непостоянна. Однако если интервалы $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения брать достаточно мелкими, то вследствие предположения о непрерывности функции $F = f(x)$ сила на каждом из малых участков пути изменится незначительно. Выберем в каждом малом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ по точке $\xi_i \left(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i \right)$ и предположим, что в каждом малом интервале величина силы имеет постоянное значение, равное ее значению в точке $\xi_i : F_i = f(\xi_i)$.

При этом предположении работа силы на отрезке пути $[x_{i-1}, x_i]$ согласно формуле (6.5) равна

$$F_i \Delta x_i = f(\xi_i) \Delta x_i .$$

Но в действительности на малом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ сила непостоянна, поэтому выражение $f(\xi_i)\Delta x_i$ дает лишь приближенное значение работы на этом малом участке. Таким образом, на участке $[x_{i-1}, x_i]$ имеем $\Delta E_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$, а на всем пути $[a,\ b]$

$$E \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i . \qquad (6.6)$$

Это приближенное равенство будет тем точнее, чем меньше Δx_i. Поэтому за точное значение работы естественно принять предел суммы (6.6) при условии, что наибольшая длина λ малых перемещений стремится к нулю, т.е.

$$E = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i . \qquad (6.7)$$

6.2. Определенный интеграл

6.2.1. Интегральная сумма. Определенный интеграл

Пусть на интервале $[a,\ b]$ задана функция $y = f(x)$. Выполним следующие действия.

1) С помощью точек деления $x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1}$ разобьем интервал $[a,\ b]$ на n «малых» интервалов (рис. 1.6):

$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots,\ [x_{i-1}, x_i],\ \ldots,\ [x_{n-1}, x_n]$, где $x_0 = a$, $x_n = b$.

2) В каждом из малых интервалов $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1, 2, 3, …, n) выберем произвольную точку ξ_i, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ и умножим значение функции $f(x)$ в точке ξ_i на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего интервала: $f(\xi_i)\Delta x_i$.

3) Составим сумму σ_n всех таких произведений:

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_i)\Delta x_i + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n,$$

или в сокращенной записи:

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,. \qquad (6.8)$$

Сумма вида (6.8) называется *интегральной суммой.*

4) Назовем наибольшую из длин малых интервалов $[x_{i-1}, x_i]$ *шагом разбиения* и обозначим его через λ.

Пусть число n интервалов разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ неограниченно растет и $\lambda \to 0$. Если при этом интегральная сумма σ_n имеет предел I, который не зависит ни от способа разбиения интервала $[a,\ b]$ на малые интервалы $[x_{i-1}, x_i]$, ни от выбора точек ξ_i в каждом из них, то это число I называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на интервале $[a,\ b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$ (читается так: «определенный интеграл от a до b от $f(x)$ на dx).

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,. \qquad (6.9)$$

Числа a и b соответственно называются *нижней и верхней границами интегрирования,* $f(x)$ — *подынтегральной функцией,* x — *переменной интегрирования,* а интервал $[a,\ b]$ — *сегментом интегрирования* (или областью интегрирования).

Таким образом, приходим к следующему определению.

Определенный интеграл есть число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма, когда шаг разбиения стремится к нулю.

Функция $f(x)$, для которой на интервале $[a,\ b]$ существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, называется *интегрируемой* на этом интервале.

З а м е ч а н и е 1. Для заданной функции $f(x)$ и заданного интервала $[a,\ b]$ мы, очевидно, имеем бесконечное множество интегральных сумм. Значения этих интегральных сумм зависят как от выбора точек деления $x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_{n-1}$, так и от выбора промежуточных точек ξ_i.

Замечание 2. Если функция $y = f(x)$ неотрицательна на интервале $[a, b]$, то как интегральная сумма, так и ее слагаемые имеют простой геометрический смысл. В самом деле, произведение $f(\xi_i)\Delta x_i$ численно равно площади прямоугольника, имеющего основанием интервал $[x_{i-1}, x_i]$, а высотой — ординату кривой в точке ξ_i (см. рис. 6.4). Построив над каждым малым сегментом прямоугольник с высотой $f(\xi_i)$, получим ступенчатую фигуру, площадь которой равна интегральной сумме σ_n, соответствующей данному разбиению интервала $[a, b]$ на части и данному выбору точек ξ_i (см. рис. 6.3).

Замечание 3. Интегральная сумма (1.8), очевидно, не зависит от того, какой буквой обозначен аргумент данной функции. Следовательно, и ее предел, т. е. определенный интеграл, не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt \text{ и т. д.}$$

Возвращаясь теперь к задачам п. 1, мы видим, что:

1. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, где $f(x) \geq 0$ для всех x на интервале $[a, b]$, численно равна определенному интегралу от функции $f(x)$, взятому по интервалу $[a, b]$:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Этот факт, выражающий геометрический смысл определенного интеграла, кратко формулируется так: определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.

2. Работа E переменной силы, величина которой F — $f(x)$, равна определенному интегралу от силы, т. е.

$$E = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Пример 6.1. Вычислить интеграл $\int_a^b 1 \cdot dx$.

Решение. Разобьем интервал $[a, b]$ на n произвольных частей точками деления $x_1, ..., x_i, ..., x_{n-1}$ и составим соответствующую интегральную сумму. Так как подынтегральная функция постоянна и тождественно равна единице, то при любом выборе промежуточных точек ξ_i получим

$$\sigma_n = 1 \cdot \Delta x_1 + ... + 1 \cdot \Delta x_i + ... + 1 \cdot \Delta x_n =$$
$$= (x_1 - a) + ... + (x_i - x_{i-1}) + ... + (b - x_{n-1}) = b - a.$$

Таким образом, любая интегральная сумма для данной функции равна *b*—a, а следовательно, и ее предел (т. е. определенный интеграл) также равен *b—a:*

$$\int_a^b 1\cdot dx = \int_a^b dx = b - a.$$

При определении интеграла $\int_a^b f(x)dx$ мы исходили из предположения, что нижняя граница *a* меньше верхней границы *b(a<b).* Обобщим понятие определенного интеграла на случай, когда *a>b* и *a=b*. При *a>b* по определению полагаем

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{6.10}$$

Это кратко выражают так: *при перестановке границ интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный.*

Определенный интеграл с равными нижней и верхней границами по определению принимается равным нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \tag{6.11}$$

В связи с определением определенного интеграла возникает вопрос, при каких условиях существует предел интегральной суммы, т. е. существует определенный интеграл.

Имеет место **теорема существования определенного интеграла**, которую мы приведем без доказательства.

*Всякая непрерывная на интервал*е $[a,\ b]$ *функция интегрируема, т. е. для такой функции существует определенный интеграл.*

Таким образом, для интегрируемости функции достаточно ее непрерывности на данном сегменте. Однако определенный интеграл может существовать и для некоторых разрывных функций. Например, можно доказать, что для всякой ограниченной на сегменте функции, имеющей на нем конечное число точек разрыва, существует определенный интеграл.

6.2.2. Свойства определенного интеграла

Установим теперь, исходя из определения интеграла, его простейшие свойства. При этом подынтегральную функцию будем считать непрерывной.

1^0. *Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла, т.е. если k – некоторое число, то*

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx. \tag{6.12}$$

Действительно,

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\left[k\cdot\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right] =$$

$$= k\cdot\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx.$$

При этом мы воспользовались тем свойством, что постоянный множитель можно вынести за знак предела.

2^0. *Определенный интеграл от суммы нескольких функций равен сумме определенных интегралов от слагаемых.*

Например, для двух слагаемых $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеем:

$$\int_a^b\left[f(x)+\varphi(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (6.13)$$

Действительно, согласно определению интеграла имеем:

$$\int_a^b\left[f(x)+\varphi(x)\right]dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[f(\xi_i)+\varphi(\xi_i)\right]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) + \sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i\right] = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i +$$

$$+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b\varphi(x)dx.$$

Совокупность свойств 1^0 и 2^0 называется свойством л и н е й н о с т и .

3^0. *Если интервал интегрирования* $[a,\, b]$ *разбит на две части* $[a,\, c]$ *и* $[c,\, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (6.14)$$

Действительно, предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения интервала $[a,\, b]$ на части и от выбора промежуточных точек ξ_i. Это позволяет при составлении каждой интегральной суммы включить c в число точек разбиения. Пусть $c = x_k$. Тогда интегральная сумма будет состоять из двух частей, одна из которых относится к интервалу $[a,\, c]$, а другая – к интервалу $[c,\, b]$:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Геометрически свойство 3^0 выражает тот факт, что площадь криволинейной трапеции с основанием $[a,\ b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a,\ c]$ и $[c,\ b]$ (рис. 6.7).

З а м е ч а н и е . Свойство было нами сформулировано в предположении, что $a < c < b$. Однако равенство (6.14) имеет место для любых чисел $a,\ b$ и c. В самом деле, пусть для определенности $c < a < b$. Тогда, применяя свойство 3^0 к интервалу* $[c,\ b]$, имеем

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx .$$

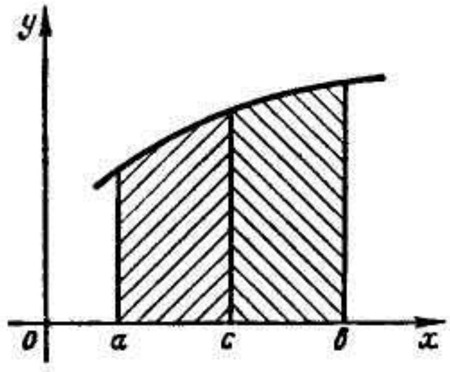


Рис. 6.7

Но $\int_c^a f(x)dx = -\int_a^c f(x)dx$ (формула (6.10), поэтому

$$\int_c^b f(x)dx = -\int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx ,$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Свойство 3^0 часто называется свойством а д д и т и в н о с т и .

4^0. *Если на интервале* $[a,\ b]$ $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

---

* При этом мы предполагаем, что функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[c,\ b]$.

В самом деле, так как $f(\xi) \geq 0$ и $\Delta x_i > 0$ для любых i, то интегральная сумма $\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$. Поэтому и предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$, т.е. $\int_a^b f(x)dx$, также неотрицателен.

Можно доказать, что если на интервале $[a, b]$ непрерывная функция $f(x) \geq 0$ и хотя бы в одной точке этого интервала $f(x) > 0$, то имеет место строгое неравенство $\int_a^b f(x)dx > 0$.

5^0. *Если на интервале* $[a, b]$ две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \geq \varphi(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx. \tag{6.15}$$

Иными словами, неравенство можно почленно интегрировать.

В самом деле, разность $f(x) - \varphi(x) \geq 0$, поэтому согласно свойству 4^0 $\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] \geq 0$. Но так как согласно свойствам 1^0 и 2^0

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx,$$

то $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \geq 0$, откуда $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx$.

Это свойство имеет простой геометрический смысл. Пусть обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются неотрицательными на интервале $[a, b]$. Тогда криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$, содержит криволинейную трапецию, ограниченную кривой $y = \varphi(x)$ (рис. 6.8). Поэтому площадь первой фигуры не меньше площади второй фигуры. Исходя из геометрического смысла определенного интеграла,

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

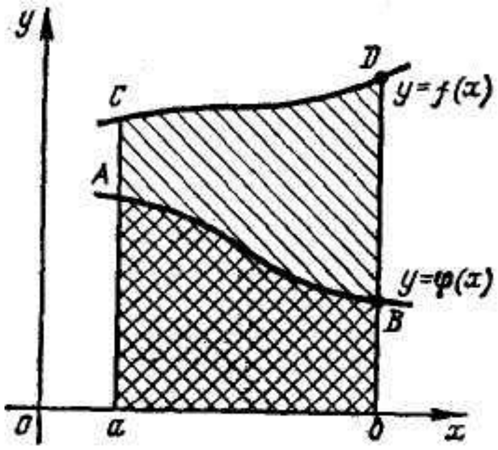


Рис. 6.8

В частности, так как всегда $-\left|f(x)\right| \le f(x) \le \left|f(x)\right|$, то из свойства 5^0 следует, что

$$-\int_a^b \left|f(x)\right| dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \left|f(x)\right| dx.$$

Отсюда имеем

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b \left|f(x)\right| dx. \tag{6.16}$$

Теорема о среднем значении. *Если* $f(x)$ - непрерывная на интервале $[a,\ b]$ *функция, то существует такая точка* ξ *этого интервала, что*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \tag{6.17}$$

Обозначим через m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на интервале $[a,\ b]$. Тогда для любого x, $a \le x \le b$, выполняются неравенства

$$m \le f(x) \le M. \tag{6.18}$$

Применяя свойства 5^0 и 1^0, из неравенства (1.18) получим

$$m \cdot \int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx.$$

Но $\int_a^b dx = b-a$ (см. пример 1). Следовательно,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \tag{6.19}$$

Разделив все члены неравенства (1.19) на $b-a$, получим $m \le \mu \le M$, где

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu. \tag{6.20}$$

Таким образом, число μ является промежуточным между наименьшим значением *m* функции $f(x)$ и её наибольшим значением *M*. Так как непрерывная на интервале $[a,\ b]$ функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между *m* и *M*, то найдется такое значение ξ на интервале $[a,\ b]$, для которого $f(\xi) = \mu$.

Подставляя в выражение (6.20) вместо μ равное ему значение $f(\xi)$, получим

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a} = f(\xi), \text{ или } \int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Итак, *определенный интеграл от непрерывной функции равен значению подынтегральной функции в некоторой промежуточной точке, умноженному на длину интервала интегрирования.*

Теорема о среднем значении допускает наглядное геометрическое толкование. Пусть $f(x) \geq 0$ на интервале $[a,\ b]$. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции (рис. 6.9). Рассмотрим прямоугольник *aABb* с тем же основанием $[a,\ b]$, что и у криволинейной трапеции, и с высотой, равной $f(\xi)$. Произведение $f(\xi)(b-a)$ численно равно площади прямоугольника. Следовательно, *криволинейная трапеция равновелика прямоугольнику с тем же основанием и с высотой, равной ординате кривой в некоторой промежуточной точке ξ основания.*

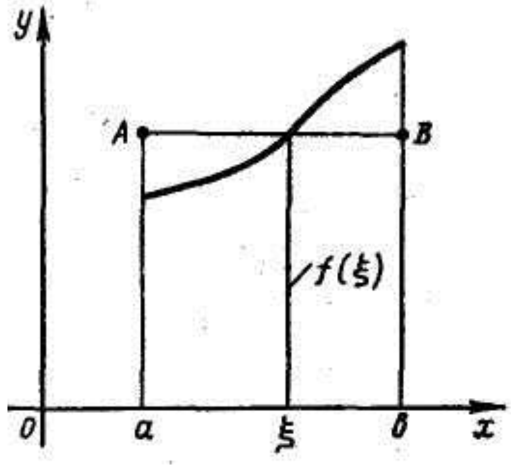


Рис. 6.9

Значение функции в точке ξ, определяемое из формулы (6.17), называется *средним значением функции на интервале.*

6.2.3. Производная интеграла по переменной верхней границе

Пусть $y = f(x)$ - функция, непрерывная на интервале $[a, b]$. Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x)dx$. При заданной подынтегральной функции значение интеграла зависит от обеих границ интегрирования a и b. Если закрепить нижнюю границу a и изменять верхнюю границу b, то интеграл будет функцией своей верхней границы. Чтобы подчеркнуть, что верхняя граница переменная, мы обозначим ее вместо b через x. Переменную интегрирования, чтобы не смешивать ее с верхней границей, обозначим через t; ясно, что значение интеграла от этого не изменится (замечание 3 в п. 6.2.1). Таким образом, интеграл с переменной верхней границей является некоторой функцией x:

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Эта функция обладает замечательным свойством, выраженным в следующей теореме.

Теорема. *Производная интеграла по переменной верхней границе равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена верхней границей:*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x). \tag{6.21}$$

Доказательство. Для нахождения производной функции $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ дадим x приращение Δx. Тогда новое значение функции равно

$$I(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Следовательно, приращение функции $I(x)$ при переходе из точки x в точку $x+\Delta x$ окажется равным

$$\Delta I = I(x+\Delta x) - I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

Но так как по свойству аддитивности

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

то

$$\Delta I = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Применим к последнему интегралу теорему о среднем:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x,$$

где c заключено между x и $x+\Delta x$. Таким образом, $\Delta I = f(c)\Delta x$. Согласно определению производной, имеем

$$\frac{\int_a^x f(t)dt}{dx} = \frac{dI(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c).$$

Так как $\Delta x \to 0$, то $x+\Delta x$, а следовательно, и c стремятся к x. Согласно условию, подынтегральная функция $f(t)$ непрерывна в точке x. Поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c) = \lim\limits_{c \to x} f(c) = f(c)$. Следовательно,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема о производной интеграла по верхней границе является одной из основных теорем математического анализа. Эта теорема вскрывает глубокую связь между операциями определенного интегрирования и дифференцирования. Теорема о производной интеграла по верхней границе показывает, что функция $\int_a^x f(t)dt$ является первообразной для $f(x)$. Но интеграл $\int_a^x f(t)dt$ существует для любого значения x в силу теоремы существования определенного интеграла от непрерывной функции.

Таким образом, имеет место следующая **теорема существования первообразной для непрерывной функции:** *всякая непрерывная функция* $f(x)$ *имеет первообразные, одной из которых является интеграл* $\int_a^x f(t)dt$.

З а м е ч а н и е 1. Исходя из геометрического смысла интеграла, как площади, замечаем, что $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ выражает переменную площадь криволинейной трапеции с основанием $[a,\ x]$ (рис. 6.10). Следовательно, на основании только что изложенного, можно сказать, что эта переменная площадь является первообразной для ординаты $y = f(x)$ линии, ограничивающей эту криволинейную трапецию.

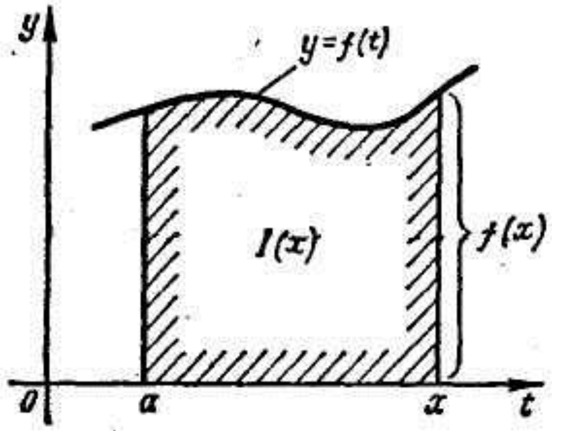


Рис. 6.10

З а м е ч а н и е 2 . При $f(x)>0$ функция $I(x)=\int_a^x f(t)dt$ - возрастающая, так как с возрастанием *x* площадь криволинейной трапеции возрастает.

6.2.4. Формула Ньютона – Лейбница

Вычисление определенного интеграла, как предела интегральных сумм, сложно даже для простейших функций. Теорема о производной интеграла по верхней границе позволяет установить простой метод вычисления определенных интегралов, минуя суммирование и переход к пределу. Этот новый метод вычисления определенного интеграла выражается формулой Ньютона – Лейбница, к выводу которой мы приступим.

В предыдущем пункте мы установили, что функция $I(x)=\int_a^x f(t)dt$ является первообразной для непрерывной подынтегральной функции $f(x)$. Как известно, всякая другая первообразная для функции $f(x)$ отличается от $I(x)$ только постоянным слагаемым. Поэтому если $F(x)$ - другая первообразная для $f(x)$, то $I(x)=F(x)+C$, или

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)+C. \qquad (6.22)$$

Постоянную *C* легко найти, если заметить, что $I(a)=\int_a^a f(t)dt=0$, как интеграл с равными границами интегрирования. Поэтому, подставляя в соотношение (6.22) *x*=*a*, получим $\int_a^a f(t)dt=F(a)+C=0$. Отсюда *C*=-*F*(*a*) и, следовательно, $\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$. В частности, при *x*=*b* имеем

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a). \qquad (6.23)$$

Это и есть *формула Ньютона – Лейбница.*

Она показывает, что, для того чтобы вычислить определенный интеграл, нужно найти какую-либо первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$ и взять разность значений этой первообразной, вычисленных для значений x, равных верхней и нижней границам интегрирования. Короче говоря, *определенный интеграл равен приращению первообразной от подынтегральной функции на интервале интегрирования.*

Разность $F(b) - F(a)$ символически обозначают $F(x)\Big|_a^b$:

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Применяя этот символ, мы можем записать формулу Ньютона – Лейбница в таком виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (6.24)$$

Пример 6.2. Вычислить $\int_1^2 e^x dx$.

Решение. Одной из первообразных от подынтегральной функции является функция e^x. Поэтому, применяя формулу (6.24) Ньютона – Лейбница, получим

$$\int_1^2 e^x dx = e^x\Big|_1^2 = e^2 - e^1 = e(e-1).$$

Пример 6.3. Вычислить $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. По формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_0^{0,5} = \arcsin 0{,}5 - \arcsin 0 = \pi/6.$$

З а м е ч а н и е . Формула Ньютона – Лейбница была выведена в предположении, что подынтегральная функция $f(x)$ н е п р е р ы в н а . Для разрывных функций формула Ньютона – Лейбница может не иметь места.

6.2.5. Замена переменной в определенном интеграле

Как и в случае неопределенного интеграла, вычисление определенного интеграла можно упростить с помощью замены переменной.

Пример 6.4. Вычислить определенный интеграл $\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$.

Решение. Найдем вначале первообразную от подынтегральной функции, сделав замену переменной по формуле $\sqrt{x+1}=t$. Тогда $x=t^2-1$, $dx=2tdt$ и, следовательно,

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=2\left(\frac{\sqrt{\left(x+1^3\right)}}{3}-\sqrt{x+1}\right)+C.$$

Таким образом, одной из первообразных от функции $\dfrac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ является функция

$$2\left(\frac{\sqrt{\left(x+1^3\right)}}{3}-\sqrt{x+1}\right).$$

Следовательно, применяя формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$\int_3^8\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=2\left(\frac{\sqrt{\left(x+1^3\right)}}{3}-\sqrt{x+1}\right)\Bigg|_3^8=2\left(\frac{\sqrt{\left(8+1\right)^3}}{3}-\sqrt{8+1}\right)-$$

$$-2\left(\frac{\sqrt{\left(3+1\right)^3}}{3}-\sqrt{3+1}\right)=10\frac{2}{3}.$$

Однако использованный здесь прием приводит к довольно громоздким вычислениям. Ниже будет показано, что можно упростить вычисление определенного интеграла, не возвращаясь от переменной t вновь к переменной x.

Предположим, что нужно вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ - непрерывная функция на интервале $[a,\ b]$. Перейдем от переменной x к переменной t, полагая $x=\varphi(t)$. Пусть значению $t=\alpha$ по формуле $x=\varphi(t)$ соответствует значение $x=a$, а значению $t=\beta$ по той же формуле – значение $x=b$; таким образом, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

Предположим, кроме того, что:

1) функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на интервале $\alpha\le t\le\beta$;

2) при изменении t от α до β значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы интервала $a\le x\le b$.

При этих условиях имеет место следующая формула замены переменной в определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt.$$

В самом деле, пусть $F(x)$ -первообразная для функции $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$. Тогда по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a). \tag{6.25}$$

Теперь покажем, что если в первообразной $F(x)$ положить $x=\varphi(t)$, то функция $F\left[\varphi(t)\right]$ будет первообразной для подынтегральной функции преобразованного интеграла, т.е. для функции $f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)$. Действительно, применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{dF\left[\varphi(t)\right]}{dt}=\frac{dF(x)}{dt}=\frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)\cdot\varphi'(t)=f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t).$$

Поэтому по той же формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = F\left[\varphi(\beta)\right]-F\left[\varphi(\alpha)\right].$$

Но так как по условию $\varphi(\beta)=b$, $\varphi(\alpha)=a$, то $F\left[\varphi(\beta)\right]=F(b)$, а $F\left[\varphi(\alpha)\right]=F(a)$. Следовательно,

$$\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = F(b)-F(a). \tag{6.25'}$$

Сравнивая равенства (6.25) и (6.25’), приходим к *формуле замены переменной:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt.$$

Покажем, как с помощью формулы замены переменной вычислить определенный интеграл $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ (пример 4).

Положим $\sqrt{x+1}=t$, т.е. $x=\varphi(t)=t^2-1$. В данном случае *a*=3, *b*=8. При *x*=*a*=3 имеем $t=\sqrt{8+1}=3$. Итак, $\alpha=2$, $\beta=3$. Находим, далее, $\varphi'(t)dt=2tdt$. Теперь, используя формулу (6.26) замены переменной, получим

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=\int_2^3\frac{\left(t^2-1\right)}{t}2tdt=2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_2^3=2\left[\left(\frac{3^3}{3}-3\right)-\left(\frac{3^3}{3}-2\right)\right]=10\frac{2}{3}.$$

Пример 6.5. Вычислить $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$.

Решение. Полагая $x=a\sin t$, получим $dx=a\cos tdt$. Если *x*=0, то $\sin t=0$, откуда *t*=0; если *x*=*a*, то $\sin t=1$, откуда $t=\pi/2$. Итак, $\alpha=0$, $\beta=\pi/2$.

Следовательно, по формуле замены переменной имеем

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t dt = a\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} \left(1+\cos 2t\right)dt = \frac{a^2}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Заметим, что часто вместо замены переменной $x=\varphi(t)$ употребляют обратную замену $t=\psi(x)$; однако при этом необходимо, чтобы функция, обратная функции $t=\psi(x)$, существовала и чтобы для этой обратной функции выполнялись условия, при которых была выведена формула замены переменной.

Пример 6.6. Вычислить $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

Решение. Полагаем $\sqrt{e^x-1}=t$. При этом легко убедиться, что обратная функция $x=\ln\left(1+t^2\right)$ существует и удовлетворяет условиям, при которых была выведена формула замены переменной. Находим $dx=\frac{2tdt}{1+t^2}$. Если $x=\ln 2$, то $t=1$; если $x=2\ln 2$, то $t=\sqrt{3}$. Итак, $\alpha=1$, $\beta=\sqrt{3}$. Применяя формулу замены переменной, получим

$$\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{2tdt}{t\left(1+t^2\right)} = 2\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = 2\left[arctgt\right]_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

6.2.6. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - две функции, непрерывные со своими первыми производными на интервале $[a,\ b]$.

Возьмем дифференциал от их произведения:

$$d\left[u(x)v(x)\right] = u(x)dv(x)+v(x)du(x) = u(x)v'(x)dx+v(x)u'(x)dx.$$

Интегрируя это тождество в пределах от *a* до *b*, получим

$$\int_a^b d\left[u(x)v(x)\right] = \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b v(x)u'(x)dx. \qquad (6.27)$$

По формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b d\left[u(x)v(x)\right] = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Таким образом, равенство (6.27) примет следующий вид:

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

откуда

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \qquad (6.28)$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.*

Так как $du = u'(x)dx$ и $dv = v'(x)dx$, то формулу (6.28) можно записать в следующем более компактном виде:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (6.29)$$

При этом следует иметь в виду, что границы интегрирования относятся к независимой переменной *x*.

Пример 6.7. Вычислить $\int_0^{\pi} x\cos xdx$.

Решение. Положим $x=u$, $\cos xdx = dv$. Тогда $du = dx$, $v = \sin x$. Применяя формулу интегрирования по частям, найдем

$$\int_0^{\pi} x\cos xdx = [x\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin xdx = [\cos x]_0^{\pi} = -2,$$

так как $[x\sin x]_0^{\pi} = \pi\sin\pi - 0\sin 0 = 0$.

Пример 6.8. Вычислить $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Положим $\ln x = u$, $\frac{dx}{\sqrt{x}} = dv$, откуда $du = \frac{dx}{x}$, $v = 2\sqrt{x}$. Следовательно, по формуле интегрирования по частям

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^e - \int_1^e 2\sqrt{x}\frac{dx}{x} = 2\sqrt{e}\ln e - 2\sqrt{1}\ln 1 - 4\left[\sqrt{x}\right]_1^e =$$

$$= 2\sqrt{e} - \left(4\sqrt{e} - 4\right) = 2\left(2 - \sqrt{e}\right).$$

6.3. Геометрические и физические приложения определенного интеграла

6.3.1. Вычисление площади в декартовых координатах

Как мы установили выше, если на интервале $[a,\, b]$ функция $y = f(x)$ непрерывна и положительна, то площадь криволинейной трапеции с основанием $[a,\, b]$, ограниченной сверху графиком этой функции, можно найти по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx. \qquad (6.30)$$

Пример 6.9. Вычислить площадь сегмента параболы, т.е. фигуры, ограниченной дугой параболы $x = y^2$ и отрезком *AB* прямой $x = a$ (рис. 6.11).

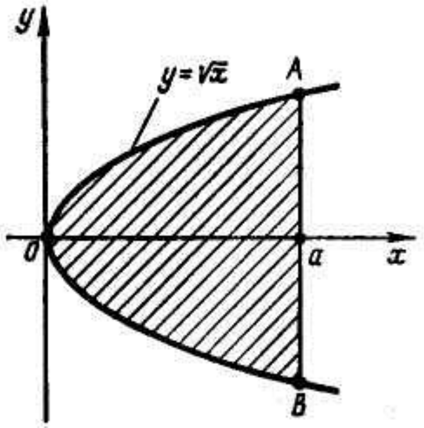


Рис. 6.11

Решение. Исходя из симметрии сегмента параболы относительно оси *Ox*, найдем его площадь *S*, как удвоенную площадь криволинейной трапеции *OAa*:

$$S = 2\int_0^a y dx = 2\int_0^a \sqrt{x} dx = \frac{4}{3} x^{3/2} \Big|_0^a = \frac{4a^{3/2}}{3} = \frac{4}{3} a\sqrt{a} .$$

Пример 6.10. Определить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Решение. Из симметрии эллипса относительно осей вытекает, что искомая площадь *S* равна учетверенной площади криволинейной трапеции *OAB* (рис. 6.12):

$$S = 4\int_0^a y dx = 4\int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx .$$

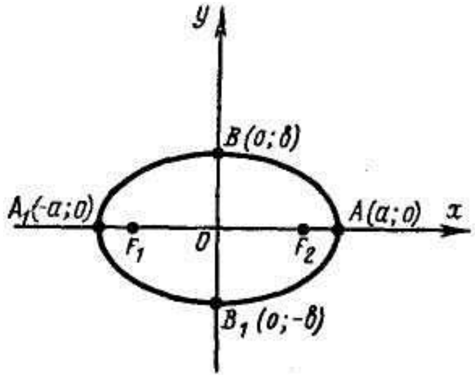


Рис. 6.12

В примере 6.5 мы нашли, что $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^2}{4}$. Следовательно,

$$S = 4\frac{b}{a}\frac{\pi a^2}{4} = \pi ab .$$

В частности, если $a=b=R$, то эллипс превращается в окружность радиуса R, и мы приходим к известной формуле для площади круга: $S=\pi R^2$.

Пусть теперь $f(x)<0$ на интервале $[a,\ b]$ (рис. 6.13). Криволинейная трапеция с основанием $[a,\ b]$, ограниченная снизу кривой $y=f(x)$, лежит ниже оси Ox. Из соображения симметрии заключаем, что ее площадь S равна площади другой криволинейной трапеции, имеющей то же основание, но ограниченной сверху кривой $y=-f(x)$ (см. рис. 6.13). Так как по условию $f(x)<0$, то $-f(x)>0$ и, применяя формулу (6.30), найдем

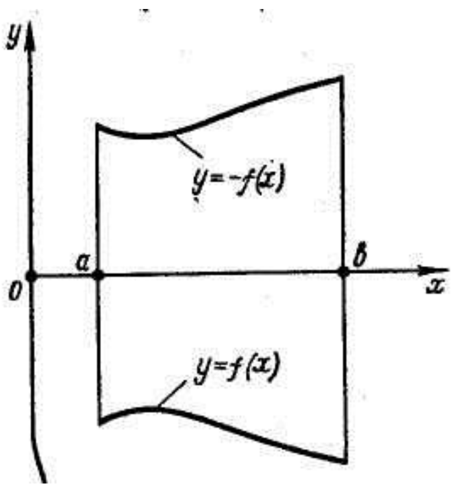


Рис. 6.13

$$S=\int_a^b\left[-f(x)\right]dx=-\int_a^b f(x)dx. \qquad (6.31)$$

Так выражается площадь криволинейной трапеции в случае отрицательной подынтегральной функции.

Пример 6.11. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-4$ и осью абсцисс (рис. 6.14).

Решение. Парабола $y=x^2-4$ пересекается с осью абсцисс в точках $A(-2;\ 0)$ и $B(2;\ 0)$. Следовательно, надо найти площадь S криволинейной трапеции ACB, основанием которого служит интервал $[-2,\ 2]$. Так как на этом интервале $y\le 0$, то для нахождения площади S пользуемся формулой (6.31).

$$S=-\int_a^b f(x)dx=--\int_{a-2}^{2}\left(x^2-4\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2}=\frac{32}{3}.$$

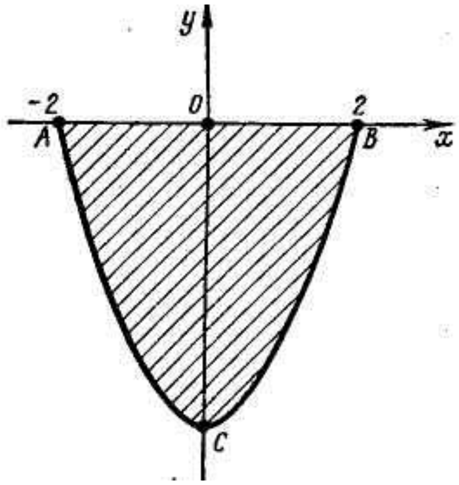


Рис. 6.14

Формулы (6.30) и (6.31) можно объединить в одну:

$$S=\int_a^b \left|f\left(x\right)\right|dx. \qquad (6.32)$$

Эта формула остается справедливой также и в том случае, когда функция $f\left(x\right)$ на интервале $\left[a,\ b\right]$ меняет знак, т.е. принимает на этом интервале как положительные, так и отрицательные значения.

Пример 6.12. Вычислить площадь *S* фигуры *OABCD*, ограниченной косинусоидой $y=\cos x$, осями координат и прямой $x=\pi$ (рис. 6.15)

Решение. По формуле (6.32) имеем

$$S=\int_0^\pi \left|\cos x\right|dx.$$

Так как функция $\cos x$ в промежутке $\left]0,\ \pi/2\right[$ положительна, а в интервале $\left]\pi/2,\ \pi\right[$ отрицательна, то

$$\left|\cos x\right|=\begin{cases}\cos x, & \text{если } 0\le x\le \pi/2,\\ -\cos x, & \text{если } \pi/2\le x\le \pi.\end{cases}$$

Поэтому

$$S=\int_0^\pi \left|\cos x\right|dx=\int_0^{\pi/2}\left|\cos x\right|dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\left|\cos x\right|dx=\int_0^{\pi/2}\left|\cos x\right|dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\left(-\cos x\right)dx=$$

$$=\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}=2$$

.

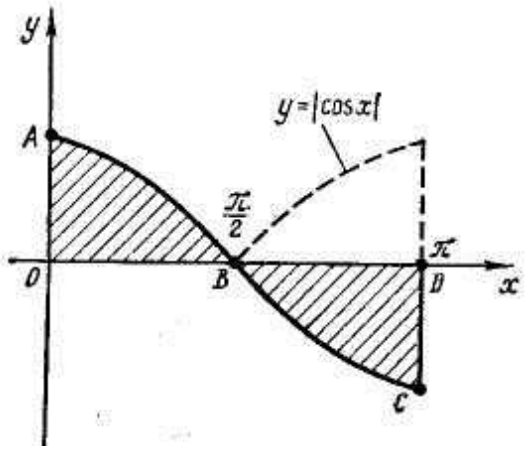


Рис. 6.15

Вычислим теперь площадь фигуры, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, снизу кривой $y = \varphi(x)$ $\left[f(x) \ge \varphi(x) \right]$ и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 6.15). Искомая площадь равна разности площадей криволинейных трапеций *aCDb* и *aABb*:

пл. *ACDB* = пл. *aCDb* – пл. *aABb* =

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \left[f(x) - \varphi(x) \right] dx. \qquad (6.33)$$

Формула (6.33) справедлива при любом расположении графиков функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ при условии $f(x) \ge \varphi(x)$.

Пример 6.13. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной кривыми $y = -x^2$ и $y = e^x$, осью ординат и прямой $x=1$ (рис. 6.16).

Решение. В данном примере $f(x) = e^x$, $\varphi(x) = -x^2$, $f(x) > \varphi(x)$, $a=0$, $b=1$. Следовательно, по формуле (6.33) получим

$$S = \int_a^b \left[f(x) - \varphi(x) \right] dx = \int_0^1 \left[e^x - \left(-x^2 \right) \right] dx = \int_0^1 \left(e^x + x^2 \right) dx =$$

$$= \left[e^x + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = e + \frac{1}{3} - 1 = e - \frac{2}{3}.$$

В заключение рассмотрим пример на вычисление площади фигуры, ограниченной линией, заданной параметрически.

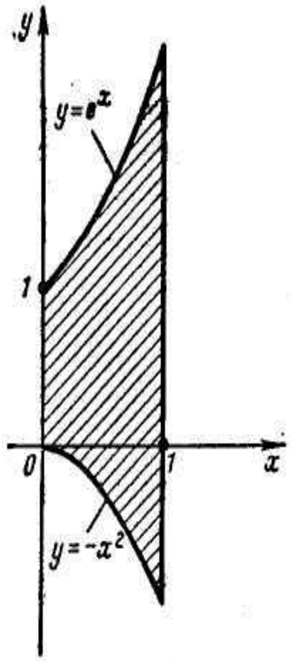


Рис. 6.16

Пример 6.14. Определить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и одной аркой циклоиды: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (рис. 6.17)

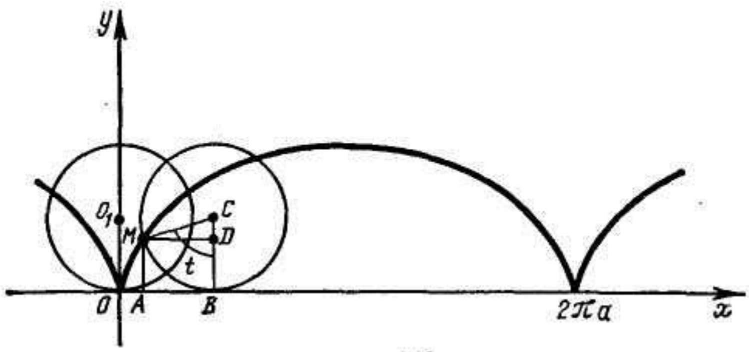


Рис. 6.17

Решение. Искомая площадь S равна $\int\limits_0^{2\pi a} y dx$. Сделаем в этом интеграле замену переменной, положив $x = a(t - \sin t)$. Тогда $dx = a(1 - \cos t)dt$. Из уравнений циклоиды: $y = a(1 - \cos t)$. Заметив, кроме того, что $t=0$ при $x=0$ и $t = 2\pi$ при $x = 2\pi a$, найдем:

$$S = \int\limits_0^{2\pi a} y dx = \int\limits_0^{2\pi a} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{2\pi a} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt = a^2 \left[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2 .$$

6.3.2. Вычисление площади в полярных координатах

Пусть дан криволинейный сектор OAB (рис. 6.18), ограниченный радиусами-векторами OA и OB и кривой, уравнение которой задано в полярных координатах: $r = f(\varphi)$. При этом предположим, что $r = f(\varphi)$ - непрерывная функция для всех φ, удовлетворяющих условию: $\alpha \le \varphi \le \beta$.

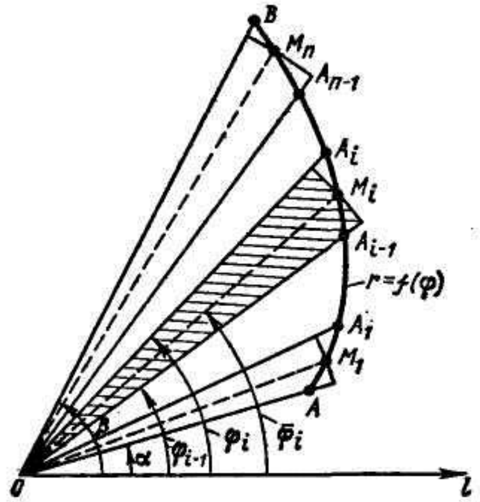


Рис. 6.18

Пусть радиус-вектор OA образует с полярной осью угол α, а радиус-вектор OB – угол β. Разобьем угол AOB на части с помощью лучей, выходящих из полюса O и составляющих с полярной с полярной осью последовательно углы $\alpha < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{i-1} < \varphi_i < \ldots < \varphi_{n-1} < \beta$. Кроме того, обозначим $\alpha = \varphi_0$ и $\beta = \varphi_n$. Через $A_1,\ A_2,\ \ldots A_{i-1},\ A_i,\ \ldots A_{n-1}$ обозначим точки пересечения лучей с кривой.

Криволинейный сектор AOB разобьется на n малых криволинейных секторов $AOA_1,\ A_1OA_2,\ \ldots,\ A_{i-1}OA_i,\ \ldots,\ A_{n-1}OB$ (см. рис. 6.17). Углы $AOA_1,\ A_1OA_2,\ \ldots,\ A_{i-1}OA_i,\ \ldots,\ A_{n-1}OB$ соответственно равны $\Delta\varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_0$, $\Delta\varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_1,\ \ldots,\ \Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1},\ \ldots,\ \Delta\varphi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$.

Если обозначить через S площадь всего криволинейного сектора, а через ΔS_i - площадь малого криволинейного сектора, ограниченного лучами OA_{i-1} и OA_i, то $S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_i + \ldots + \Delta S_n$ или $S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$. Вычислить площадь малого криволинейного сектора так же трудно, как и площадь большого. Поэтому мы поступим следующим образом: внутри каждого малого сектора $OA_{i-1}OA_i$ проведем луч под углом $\bar{\varphi}_i\left(\varphi_{i-1} \le \bar{\varphi}_i \le \varphi_i\right)$. Точку пересечения этого луча с кривой обозначим через M_i. Тогда $OM_i = r_i = f\left(\bar{\varphi}_i\right)$. Заменим теперь каждый малый криволинейный сектор $OA_{i-1}OA_i$ круговым сектором, описанным из вершины O радиусом $r_i = f\left(\bar{\varphi}_i\right)$ (см. рис. 6.17). Площадь каждого такого кругового сектора равна $\dfrac{OM_i}{2}\Delta\varphi_i = \dfrac{1}{2} f^2\left(\overline{\varphi}_i\right)\Delta\varphi_i$ и дает приближенное значение площади малого криволинейного сектора.

Таким образом, имеем следующее приближенное равенство:

$$\Delta S_i \approx \frac{1}{2} f^2\left(\overline{\varphi}_i\right)\Delta\varphi_i .$$

Заменив площадь каждого криволинейного сектора площадью соответствующего кругового сектора, получим фигуру, состоящую из ряда круговых секторов.

Площадь этой фигуры дает приближенное значение площади S криволинейного сектора. Поэтому

$$S \approx \frac{1}{2} f^2\left(\overline{\varphi}_1\right)\Delta\varphi_1 + \frac{1}{2} f^2\left(\overline{\varphi}_2\right)\Delta\varphi_2 + \ldots + \frac{1}{2} f^2\left(\overline{\varphi}_i\right)\Delta\varphi_i + \ldots + \frac{1}{2} f^2\left(\overline{\varphi}_n\right)\Delta\varphi_n ,$$

или в сокращенной записи:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f^2\left(\overline{\varphi}_i\right)\Delta\varphi_i .$$

Точность этого приближенного равенства повышается с уменьшением $\Delta\varphi_i$. Поэтому точное значение площади S криволинейного сектора получится как предел площади фигуры, составленной из круговых секторов, при условии, что все $\Delta\varphi_i$ стремятся к нулю. Таким образом,

$$S = \lim_{\Delta\varphi_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f^2\left(\overline{\varphi}_i\right)\Delta\varphi_i .$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2} f^2\left(\overline{\varphi}_i\right)\Delta\varphi_i$ есть интегральная сумма для непрерывной функции $\dfrac{1}{2} f^2\left(\varphi\right)$, заданной для значений φ, заключенных между α и β, то ее предел есть определенный интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \dfrac{1}{2} f^2\left(\varphi\right)d\varphi$. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2\left(\varphi\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi \qquad (6.34)$$

Пример 6.15. Определить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a\left(1+\cos\varphi\right)$ (рис. 6.19).

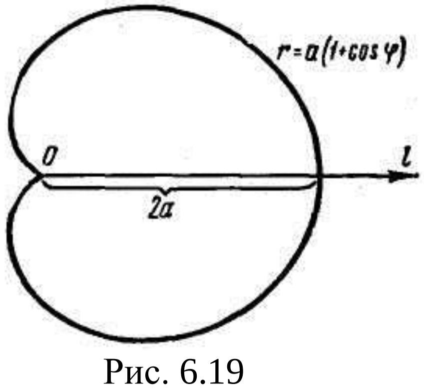


Рис. 6.19

Решение. Применяя формулу (6.34) при $\alpha = 0$ и $\beta = 2\pi$, найдем

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2 (1+\cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left[\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

6.3.3. Вычисление объема тела по известным поперечным сечениям

Рассмотрим некоторое тело, объем *V* которого мы хотим определить (рис. 6.20). Предположим, что нам известны площади сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными оси *Ox*. Эти сечения называются *поперечными*. Положение поперечного сечения определяется абсциссой *x* точки его пересечения с осью *Ox*.

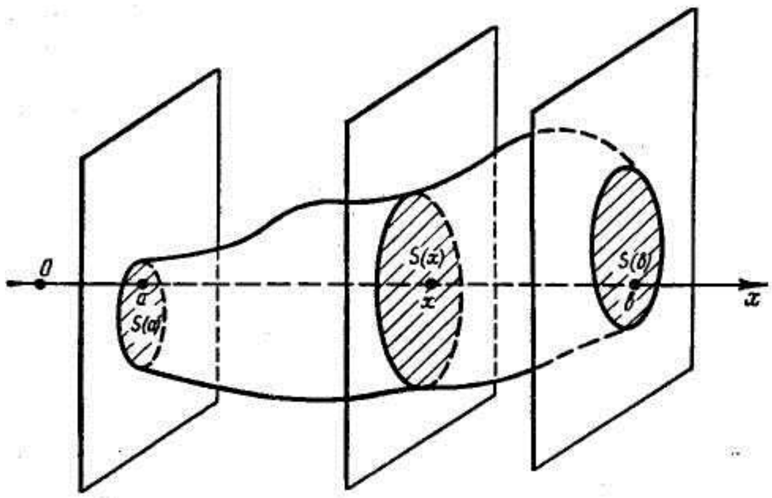


Рис. 6.20

С изменением *x* площадь сечения, вообще говоря, изменяется. Следовательно, площадь сечения есть некоторая функция *x*, которую мы обозначим через $S(x)$ и будем считать известной. Обозначим далее через a и b абсциссы крайних сечений тела*. Для вычисления объема *V* тела поступим следующим образом: разобьем интервал $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ и через точки деления проведем плоскости, перпендикулярные оси *Ox*. Эти плоскости рассекут тело на n слоев (рис. 6.21). Обозначим объем слоя, заключенного между плоскостями, проведенными через точки x_{i-1} и x_i, через ΔV_i. Тогда $V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_n$, или $V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$.

* Оба эти сечения (или одно из них) в частных случаях могут сводиться к точкам.

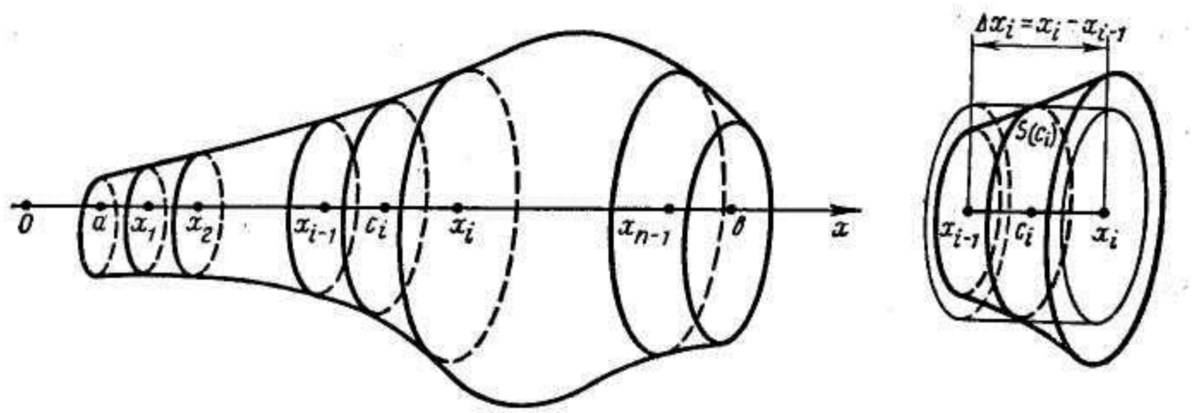


Рис. 6.21

Рассмотрим один из слоев, образованный сечениями с абсциссами x_{i-1} и x_i. Его объем ΔV_i приближенно равен объему прямого цилиндра, высота которого равна длине отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, т.е. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а основание совпадает с поперечным сечением тела, соответствующим какой-либо абсциссе c_i, где $x_{i-1} \le c_i \le x_i$ (см. рис. 6.21) и, следовательно, имеет площадь $S(c_i)$.

Объем такого цилиндра равен, как и объем кругового цилиндра, произведению площади основания на высоту: $S(c_i)\Delta x_i$. Таким образом, $\Delta V_i \approx S(c_i)\Delta x_i$. Поэтому для объема нашего тела получим следующее приближенное равенство:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i .$$

Точность этого приближенного равенства увеличивается с уменьшением шага разбиения λ интервала $[a, b]$. Потому точное значение объема получим, устремляя шаг разбиения к нулю. Итак,

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i .$$

Сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i$ есть интегральная сумма для функции $S(x)$.

Поэтому

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx .$$

Следовательно,

$$V = \int_a^b S(x)dx . \tag{6.35}$$

В этой формуле $S(x)$ означает площадь поперечного сечения, а a и b – абсциссы крайних точек сечения тела.

Пример 6.16. Определить объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Решение. Рассекая эллипсоид плоскостью $x=h$, получим эллипс $\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2\left(1-h^2/a^2\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-h^2/a^2\right)}=1,\\ x=h\end{aligned}\right\}$ с полуосями $b\sqrt{1-h^2/a^2}$ и $c\sqrt{1-h^2/a^2}$ (рис. 6.22). Следовательно (пример 10), площадь сечения $S(h)=\pi bc\left(1-h^2/a^2\right)$. Поэтому по формуле (6.35), в которой x заменяем на h, получим

$$V=\int_{-a}^{a}S(h)dh=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)dh=\pi bc\left[h-\frac{h^2}{3a^2}\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

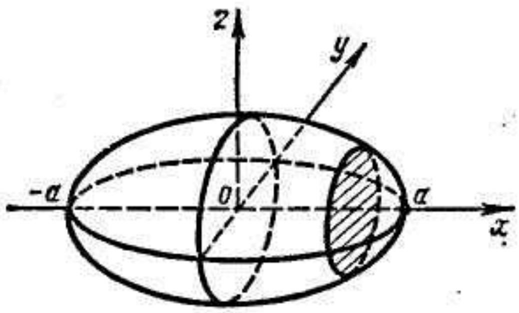


Рис. 6.22

В частности, при $a=b=c=R$ получаем шар радиуса R, объем которого равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

6.3.4. Объем тела вращения

Рассмотрим криволинейную трапецию с основанием $[a,\ b]$, ограниченную непрерывной кривой $y=f(x)$. Определим объем тела, образованного вращением трапеции вокруг оси Ox (рис. 6.23). Поперечными сечениями являются круги с радиусами, равными модулю ординаты y вращающейся кривой. Следовательно, площадь сечения

$$S(x)=\pi y^2=\pi\left[f(x)\right]^2.$$

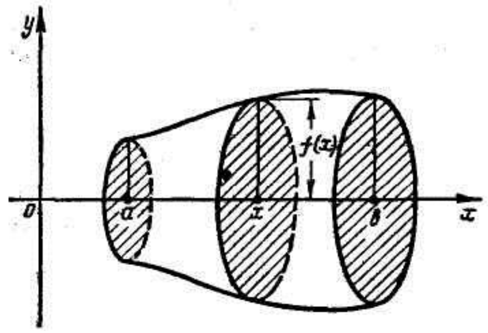


Рис. 6.23

По формуле (6.35) найдем объем тела вращения

$$V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx=\pi\int_a^b y^2dx. \qquad (6.36)$$

Пример 6.17. Определить объем тела, ограниченного поверхностью вращения параболы $y^2=x$ вокруг оси Ox и плоскостью $x=h$ (рис. 6.24).

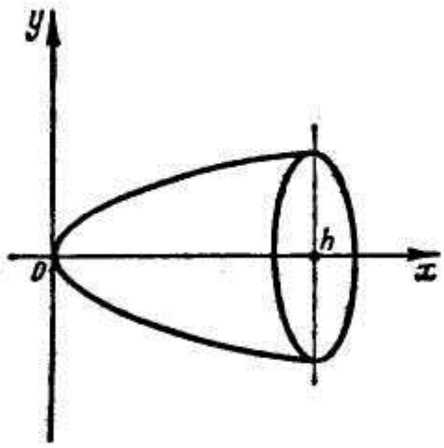


Рис. 6.24

Решение. Применяя формулу (6.36), найдем

$$V=\pi\int_0^h y^2dx=\pi\int_0^h xdx=\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^h=\frac{\pi h^2}{2}.$$

6.3.5. Длина дуги кривой

В элементарной геометрии измерялись длины прямолинейных отрезков, а также длина окружности и ее частей. За длину окружности принимался предел периметров правильных вписанных в окружность многоугольников при неограниченном увеличении числа их сторон. Обобщим это определение на случай любой кривой.

Пусть в пространстве задана дуга $\overset{\cup}{AB}$ (рис. 6.25). Разобьем ее точками M_1, M_2, ..., M_{n-1} на n частей. Соединив соседние точки деления отрезками, получим ломаную, вписанную в дугу $\overset{\cup}{AB}$. Эта ломаная состоит из звеньев M_0M_1, M_1M_2, ..., $M_{i-1}M_i$, ..., $M_{n-1}M_n$, где M_0 совпадает с точкой A, а M_n - с точкой B.

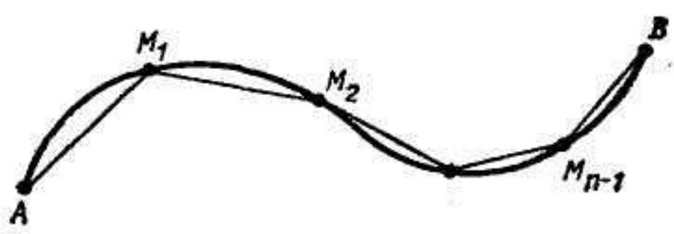


Рис. 6.25

Примем для длин этих звеньев следующие обозначения: дл. $M_0M_1 = \Delta L_1$, дл. $M_1M_2 = \Delta L_2$, ..., дл. $M_{i-1}M_i = \Delta L_1$, ..., $M_{n-1}M_n = \Delta L_n$. Тогда периметр L_n этой ломаной

$$L_n = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \ ...+ \Delta L_i + \ ...+ \Delta L_n,$$

Или, в сокращенной записи, $L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i$. Очевидно, с уменьшением длин звеньев ΔL_n ломаной она по своей форме приближается к дуге $\overset{\cup}{AB}$. Поэтому естественно ввести следующее определение.

Длиной l дуги $\overset{\cup}{AB}$ называется предел, к которому стремится периметр вписанной в эту дугу ломаной, когда число ее звеньев неограниченно растет, а наибольшая из длин звеньев стремится к нулю:

$$l = \lim_{\max \Delta L_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i . \qquad (6.37)$$

При этом предполагается, что предел (6.37) существует и не зависит от выбора вписанных ломаных.

Кривые, для которых предел (6.37) существует, называются *спрямляемыми.* Мы сейчас покажем, что при выполнении некоторых ограничений, наложенных на кривые, этот предел всегда существует.

Рассмотрим сначала вопрос о длине дуги плоской кривой, заданной уравнением в явном виде.

Т е о р е м а . *Пусть кривая* $\overset{\cup}{AB}$ *задана уравнением* $y = f(x)$, *где* $f(x)$ - *непрерывная функция, имеющая непрерывную первую производную во всех точках интервала* $[a,\ b]$. *Тогда дуга* $\overset{\cup}{AB}$ *имеет длину, равную*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Разобьем дугу $\overset{\cup}{AB}$ точками $M_1,\ M_2,\ ...,\ M_{n-1}$ на n частей (рис. 6.26). Пусть эти точки имеют соответственно абсциссы $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{n-1}$, причем $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Впишем в дугу $\overset{\cup}{AB}$ ломаную $M_0M_1M_2\ ...\ M_{i-1}M_i\ ...\ M_{n-1}M_n$. Тогда периметр этой ломаной равен $\sum_{i=1}^{n} \Delta L_i$, где ΔL_i - длина $M_{i-1}M_i$. Согласно формуле расстояния между двумя точками $M_{i-1}(x_i;\ y_{i-1})$ и $M_i(x_i;\ y_i)$ на плоскости

$$\Delta L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2},$$

где $y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Но по формуле о конечном приращении, примененной к интервалу $[x_{i-1},\ x_i]$, имеем

$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$, причем $x_{i-1} < c_i < x_i$.

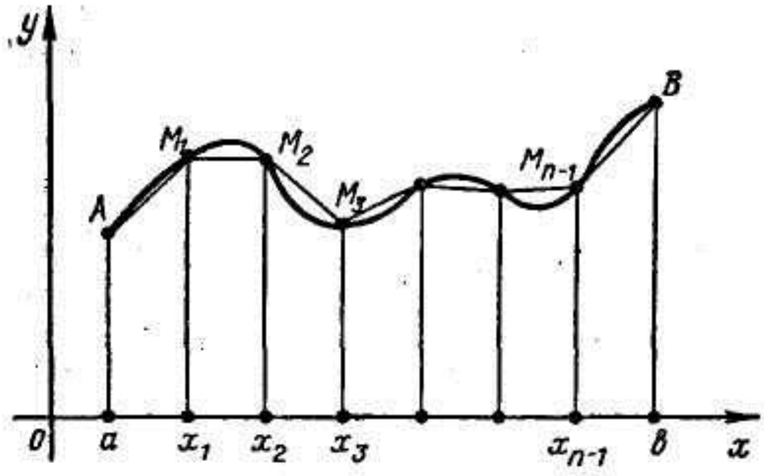


Рис. 6.26

Следовательно,

$$\Delta L_i = \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left[f'\left(c_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)\right]^2} = \sqrt{1 + \left[f'\left(c_i\right)\right]^2}\left(x_i - x_{i-1}\right),$$

или

$$\Delta L_i = \sqrt{1 + \left[f'\left(c_i\right)\right]^2}\Delta x_i\,, \qquad (6.38)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Поэтому периметр ломаной

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta L_i = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 + \left[f'\left(c_i\right)\right]^2}\Delta x_i\,. \qquad (6.39)$$

Итак, периметр ломаной оказался равным интегральной сумме, составленной для функции $\sqrt{1 + \left[f'\left(c_i\right)\right]^2}$. Эта функция непрерывна на интервале $\left[a,\, b\right]$ вследствие предположения о непрерывности $f'\left(x\right)$. Следовательно, по теореме существования определенного интеграла интегральная сумма (1.39) имеет предел, равный $\int\limits_a^b \sqrt{1 + \left[f'\left(x\right)\right]^2}dx$, при условии, что шаг разбиения λ стремится к нулю.

Длина кривой *l* равна пределу периметра $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta L_i$ вписанной в неё ломаной при условии, что наибольшая из длин звеньев ΔL_i стремится к нулю. Заметив, что при $\Delta L_i \to 0$ также и * $\Delta x_i \to 0$, получим

$$l = \lim_{\max \Delta L_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta L_i = \lim_{\max \Delta L_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 + \left[f'\left(c_i\right)\right]^2}\Delta x_i = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left[f'\left(c_i\right)\right]^2}dx\,.$$

Таким образом,

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left[f'\left(c_i\right)\right]^2}dx = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx\,. \qquad (6.40)$$

* Так как $\Delta L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$, то $\left|\Delta x_i\right| < \Delta L_i$.

Пример 6.18. Вычислить длину дуги цепной линии $y = chx$ для $0 \le x \le 1$ (рис. 6.27).

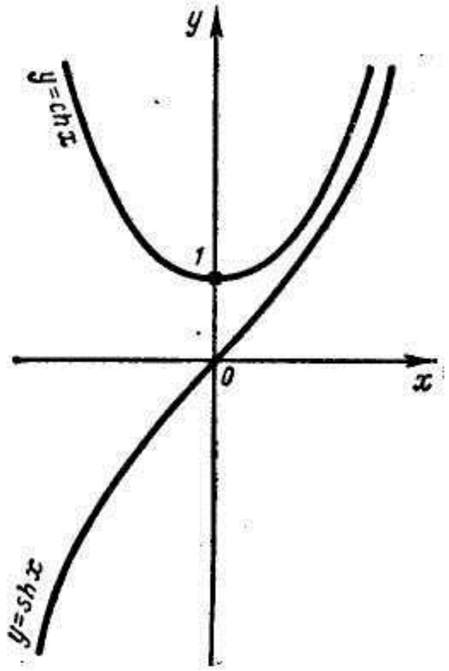


Рис. 6.27

Решение. Находим $y' = (chx)' = shx$. Следовательно, $1 + y'^2 = 1 + sh^2 x = ch^2 x$. По формуле (6.40) получим

$$l = \int_0^1 \sqrt{ch^2 x} dx = \int_0^1 chxdx = shx\Big|_0^1 = sh1 - sh0 = sh1 \approx 1{,}17.$$

Пусть теперь кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. При этом предположим, что функции $x(t)$ и $y(t)$ и их производные непрерывны и $x'(t) > 0$. Произведем в интеграле (1.40) замену переменной, положив $x = x(t)$. Так как при этом $y = y(t)$, то по правилу дифференцирования функции, заданной параметрически, найдем $y_x{}' = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ и, замечая, что $dx = x'(t)dt$, получим

$$\sqrt{1 + y_x'^2} dx = \sqrt{1 + \left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]^2} x'(t) dt = \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2} dt.$$

Следовательно,

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y_x'^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2} dt, \qquad (6.41)$$

где $a = x(\alpha)$ и $b = x(\beta)$.

З а м е ч а н и е . Формула (6.41) справедлива и в том случае, когда производная $x'(t)$ на интервале $[\alpha, \beta]$ либо отрицательна, либо не сохраняет знак.

Пример 6.19. Определить длину одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ (см. рис. 1.16).

Решение. Так как $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$, то

$$\sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2} = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} = a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a \sin\frac{t}{2}.$$

По формуле (1.41) получим

$$l = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a\cos\pi + 4a\cos 0 = 4a + 4a = 8a.$$

Найдем теперь выражение для длины дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, предполагая, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на интервале $[\alpha, \beta]$. Эту кривую можно задать параметрически, принимая за параметр полярный угол φ. Действительно, так как между декартовыми и полярными координатами существует зависимость $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то, принимая во внимание, что $r = r(\varphi)$, получим $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$. Так как $x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi$, $y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi$, то, используя формулу (1.41), находим

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\,d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2}\,d\varphi.$$

После очевидных упрощений получим

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi. \qquad (6.42)$$

Пример 6.20. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$ (см. рис. 6.18).

Решение. Кардиоида симметрична относительно полярной оси φ от 0 до π, мы получим по формуле (6.42) половину длины кардиоиды:

$$\frac{1}{2} = \int_0^\pi \sqrt{\left[a(1 + \cos\varphi)\right]^2 + \left\{\left[a(1 + \cos\varphi)\right]'\right\}^2}\,d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{a^2(1 + \cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\int_0^\pi \sqrt{2(1 + \cos\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 4a\sin\frac{\pi}{2} = 4a.$$

Вся длина кардиоиды $l = 2 \cdot 4a = 8a$.

Можно показать, что для длины дуги пространственной кривой, заданной уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, имеет место формула, аналогичная формуле (6.41):

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt. \qquad (6.43)$$

Пример 6.21. Определить длину одного витка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$ (рис. 6.28).

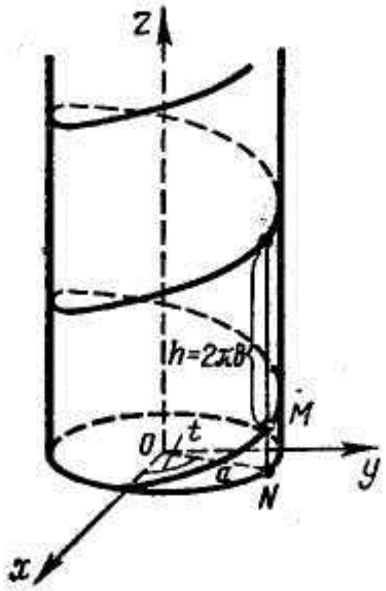


Рис. 6.28

Решение. По формуле (6.43) имеем

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

6.3.6. Дифференциал дуги

Пусть по формуле (6.40) для длины дуги нижняя граница *a* остается постоянной, а верхняя граница изменяется. Чтобы подчеркнуть это, обозначим верхнюю границу буквой *x*, а переменную интегрирования, чтобы не смешивать ее с верхней границей, – буквой *t*. Если при этом учесть, что длина дуги *l* есть функция верхней границы, то формулу (6.40) можно записать в следующем виде:

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left[f'(t)\right]^2}\,dt\,.$$

Согласно теореме о производной интеграла по верхней границе эта функция дифференцируема, и ее производная

$$l'(x) = \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,. \qquad (6.44)$$

Отсюда дифференциал дуги

$$dl(x) = l'(x)\,dx = \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx,$$

или, в сокращенной записи,

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\,dx\,.$$

Так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то $dl = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$, или

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}\,. \tag{6.45}$$

Пользуясь формулой (6.45) и учитывая, что дифференциал функции равен приращению ординаты касательной, приходим к следующему геометрическому смыслу дифференциала дуги (рис. 6.29): *дифференциал дуги dl равен длине отрезка касательной от точки касания M с абсциссой x до точки M_1 с абсциссой $x + dx$.*

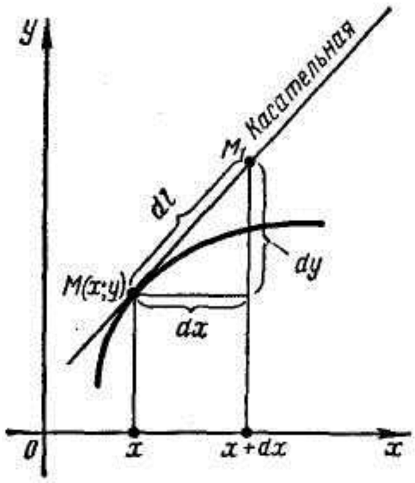


Рис. 6.29

Докажем теорему о пределе отношения длины дуги к длине стягивающей ее хорды. Для простоты доказательства ограничимся случаем плоской кривой, заданной уравнением $y = f(x)$.

Теорема. *Пусть дуга задана уравнением $y = f(x)$, причем $f(x)$ и $f'(x)$ - непрерывные функции. Тогда предел отношения длины этой дуги к длине стягивающей ее хорды равен единице при стремлении длины хорды к нулю.*

Доказательство. Рассмотрим участок дуги кривой между точками *A* и *B* с абсциссами x_0 и $x_0 + \Delta x$ (рис. 6.30). Длина дуги

$$l = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

Применяя теорему о среднем (формула 6.17), получим

$$l = \sqrt{1 + \left[f'(c_1)\right]^2}\,\Delta x, \text{ где } x_0 < c_1 < x_0 + \Delta x.$$

С другой стороны, длина стягивающей хорды $AB = \sqrt{1 + \left[f'(c_2)\right]^2}\,\Delta x$, где $x_0 < c_2 < x_0 + \Delta x$ (формула (6.38)). Замечая, что если $\Delta x \to 0$, то c_1 и c_2 стремятся к x_0, получим

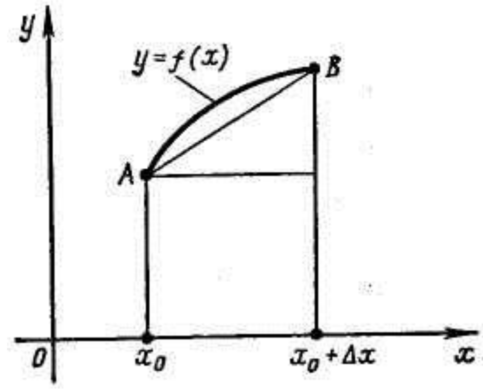


Рис. 6.30

$$\lim_{AB\to 0}\frac{l}{AB}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+\left[f'(c_1)\right]^2}\Delta x}{\sqrt{1+\left[f'(c_2)\right]^2}\Delta x}=\frac{\sqrt{1+\left[f'(x_0)\right]^2}}{\sqrt{1+\left[f'(x_0)\right]^2}}=1.$$

6.3.7. Использование понятия определенного интеграла в экономике

Если в *функции Кобба-Дугласа* считать, что затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны, то она примет вид $g(t)=(\alpha t+\beta)e^{\gamma t}$. Тогда объем выпускаемой продукции за T лет составит:

$$Q=\int_0^T(\alpha t+\beta)e^{\gamma t}dt. \qquad (6.46)$$

Пример 6.22. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба-Дугласа имеет вид $g(t)=(1+t)e^{3t}$.

Решение. По формуле (1) объем Q произведенной продукции равен

$$Q=\int_0^4(1+t)e^{3t}dt.$$

Используем метод интегрирования по частям. Пусть $u=t+1,\ dv=3^{3t}dt$. Тогда $du=dt$, $v=\int e^{3t}dt=\frac{1}{3}e^{3t}$.

Следовательно,

$$Q=(t+1)\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^4-\int_0^4\frac{1}{3}e^{3t}dt=\frac{1}{3}\left(5e^{12}-1\right)-\frac{1}{9}e^{3t}\Big|_0^4=\frac{1}{9}\left(14e^{12}-2\right)\approx 2{,}53\cdot 10^5 \text{ (усл. ед.)}$$

Исследуя *кривую Лоренца* – зависимость процента доходов от процента, имеющего их населения (кривую OBA, рис. 6.31), мы можем оценить степень неравенства в распределении доходов населения. При равномерном распределении доходов кривая Лоренца вырождается в прямую – биссектрису OA, поэтому площадь фигуры OAB между биссектрисой OA и кривой Лоренца, отнесенная к площади треугольника *OAC* (*коэффициент Джини*), характеризует степень неравенства в распределении доходов населения.

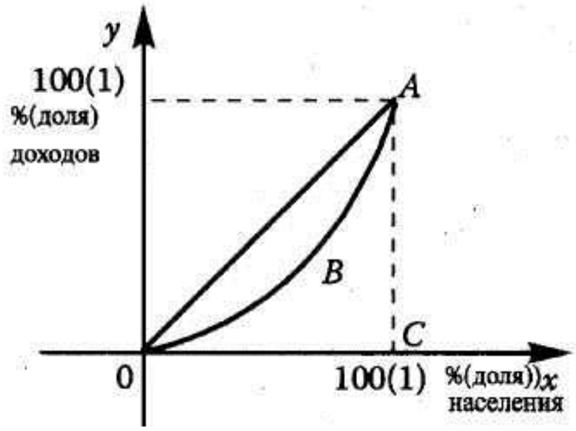


Рис. 6.31

Пример 6.23. По данным исследований в распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца *OBA* (рис. 6.31) может быть описана уравнением $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, где *x* – доля населения, *y* – доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини.

Решение. Очевидно, коэффициент Джини (рис. 6.30)

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2S_{OBAC}, \text{ так как } S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}.$$

$$S_{OBAC} = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Поэтому $k = 1 - 2\left(1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx\right) = 2\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx - 1$.

С помощью замены, например, $x = \sin t$ можно вычислить $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \pi/4$. Итак, коэффициент Джини $k = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57$.

Достаточно высокое значение *k* показывает существенно неравномерное распределение доходов среди населения в рассматриваемой стране.

Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время *t* (лет) при годовом проценте (процентной ставке) *p*, называется *дисконтированием*. Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капитальных вложений. Пусть K_t - конечная сумма, полученная за *t* лет, и *K* – дисконтируемая (начальная) сумма, которую в финансовом анализе называют также *современной* суммой. Если проценты простые, то $K_t = K(1 + it)$, где $i = p/100$ - удельная процентная ставка. Тогда $K = K_t/(1 + it)$. В случае сложных процентов $K_t = K(1 + it)^t$ и потому $K = K_t/(1 + i)^t$.

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ и при удельной норме процента, равной *i*, процент начисляется непрерывно. Можно показать, что в этом случае дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле:

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it}dt. \tag{6.47}$$

Пример 6.24. Определить дисконтированный доход за три года при процентной ставке 8%, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн руб. и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млн руб.

Решение. Очевидно, что капиталовложения задаются функцией $f(t) = 10 + 1 \cdot t = 10 + t$. Тогда по формуле (6.47) дисконтированная сумма капиталовложений $K = \int_0^3 (10+t)e^{-0,08t}dt$.

Интегрируя (аналогично примеру 1), получим K= 30,5 млрд руб. Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года ежегодные капиталовложения от 10 до 13 млн руб. равносильны одновременным первоначальным вложениям 30,5 млн руб. при той же, начисляемой непрерывно, процентной ставке.

Пусть известна функция $t = t(x)$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где x — порядковый номер изделия в партии. Тогда *среднее время* t_{cp}, затраченное *на изготовление одного изделия в период освоения* от x_1 до x_2 изделий, вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)dx. \tag{6.48}$$

Что касается функции изменения затрат времени на изготовление изделий $t = t(x)$, то часто она имеет вид

$$t = ax^{-b}, \tag{6.49}$$

где a — затраты времени на первое изделие, b — показатель производственного процесса.

Пример 6.25. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от x_1 = 100 до x_2 = 121 изделий, полагая в формуле (6.49) a =600 (мин), b= 0,5.

Решение. Используя формулу (6.48), получаем

$$t_{cp} = \frac{1}{121-100} \int_{100}^{121} 600x^{-121}dx = \frac{600}{21} 2\sqrt{x}\Big|_{100}^{121} = \frac{400}{7} \approx 57,2 \text{(мин)}.$$

7. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

7.1. Интегралы с бесконечными границами

Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ стремится к конечному пределу при неограниченном возрастании b, то этот предел называют *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначают символом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Таким образом,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (7.1)$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ *существует* или *сходится.* Если указанный предел не существует (в частности, если он бесконечен), то говорят, что интеграл *не существует* или *расходится.*

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечной нижней границей:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (7.2)$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными границами определяется формулой *

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (7.3)$$

где c – любая фиксированная точка оси Ox.

Таким образом, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ существует только тогда, когда существует каждый из интегралов $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ и $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$.

Из приведенных определений непосредственно видно, что несобственный интеграл является не пределом интегральных сумм, а пределом определенного интеграла с переменной границей интегрирования.

---

* Можно показать, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, определяемый формулой (7.2), не зависит от выбора точки c.

Заметим, что если функция положительна и непрерывна на бесконечном интервале $[x,\ +\infty)$ и если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ существует, то мы можем его трактовать как площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, бесконечным интервалом $[a,\ +\infty)$ оси Ox и прямой x=a (рис. 7.1).

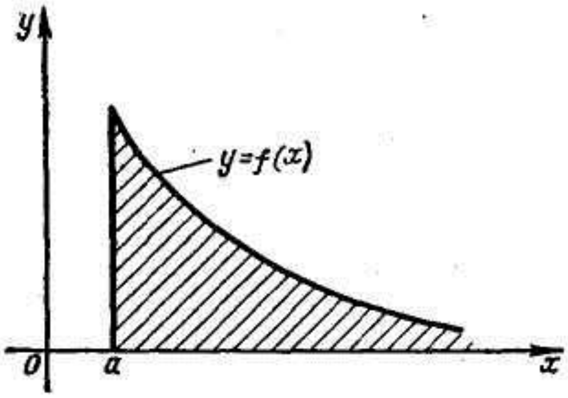


Рис. 7.1

Пример 7.1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha>0$.

Решение. Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^\alpha}$ $(b>1)$.

Если $\alpha\neq1$, то $\int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^\alpha}=\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^b=\frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right)$.

Если же $\alpha=1$, то $\int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^\alpha}=\ln x\Big|_1^b=\ln b$.

Пусть $\alpha>1$; тогда $\alpha-1>0$ и поэтому $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(b^{1-\alpha}\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{b^{\alpha-1}}=0$. Следовательно, в этом случае $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^\alpha}=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right)=\frac{1}{\alpha-1}$.

Пусть $\alpha<1$; тогда имеем $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^\alpha}=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}=+\infty$; аналогично при $\alpha=1$ получим $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^\alpha}=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln b=+\infty$.

Таким образом, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ при $\alpha>0$ сходится, а при $\alpha\leq1$ расходится.

Пример 7.2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

По формуле (7.3), полагая $c=0$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}arctgx\Big|_a^0=\lim_{a\to-\infty}\left(arctg0-arctga\right)=$$

$$=0-\left(-\pi/2\right)=\pi/2.$$

Аналогично можно показать, что $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi/2$.

Поэтому $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$, т.е. интеграл сходится.

Пример 7.3. $\int_{0}^{+\infty}\sin xdx$ расходится, так как $\int_{0}^{b}\sin xdx=1-\cos b$ не имеет предела при $b\to+\infty$, хотя и остается заключенным между 0 и 2.

Можно показать, что большинство основных свойств определенных интегралов сохраняется для сходящихся интегралов с бесконечными пределами. В частности, например, справедлива формула замены переменной. Часто удачной заменой переменной несобственный интеграл с бесконечными пределами сводится к определенному интегралу.

Пример 7.4. Вычислить интеграл $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Решение. Положим $x=tgz$, тогда

$$dx=\frac{dz}{\cos^2 z},\ \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1}{\left(\sec^2 z\right)^2}=\cos^4 z.$$

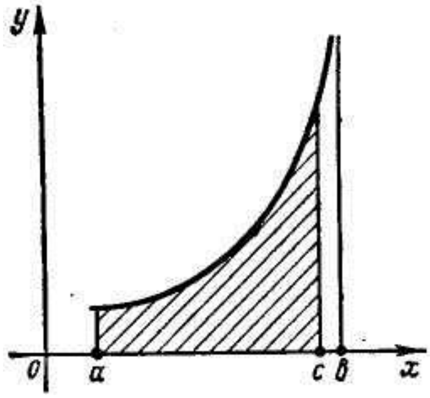
При этом, если z меняется от 0 до $\pi/2$, то x меняется от 0 до $+\infty$. Таким образом,

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\int_{0}^{\pi/2}\cos^2 zdz=\int_{0}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2z}{2}dz=\frac{\pi}{4}.$$

7.2. Интегралы от разрывных функций

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна при $a \le x < b$, а в точке b имеет разрыв. В этом случае определение интеграла от функции $f(x)$ на интервале $[a,\ b]$ как предела интегральных сумм, вообще говоря, неприменимо, так как этот предел может и не существовать. В самом деле, пусть, например, $f(x) > 0$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$ (рис. 7.2). Тогда при любом разбиении интервала $[a,\ b]$ на части $[a,\ x_1]$, $[x_1,\ x_2]$, ..., $[x_{n-1},\ b]$ функция $f(x)$ является неограниченной на последнем интервале $[x_{n-1},\ b]$ (так как по предположению $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$). Поэтому, если взять точку ξ_n достаточно близко к точке b, можно сделать произведение $f(\xi_n)\Delta x_n$, а следовательно, и интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, сколь угодно большими. Это значит, что интегральные суммы неограниченны, и, следовательно, они не имеют предела при стремлении шага разбиения λ к нулю.

Рис. 7.2



Однако и в этом случае, несмотря на то, что прежнее определение интеграла неприемлемо, можно обобщить понятие интеграла.

Прежде чем переходить к определениям, разберем конкретный пример. Рассмотрим функцию $y = 1/\sqrt{1-x}$. Эта функция стремится к бесконечности при $x \to 1$ слева. Однако на интервале $[0,\ c]$, где $0 < c < 1$, функция непрерывна, и поэтому существует интеграл

$$\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}\Big|_0^c = 2\left(1 - \sqrt{1-c}\right),$$

который имеет предел при $c \to 1-0$:

$$\lim_{c \to 1-0} 2\left(1 - \sqrt{1-c}\right) = 2.$$

Этот предел и называют несобственным интегралом от разрывной на интервале $[0,\ 1]$ функции $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ и обозначают символом $\int\limits_0^c \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}$. Таким образом,

$$\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c\to 1-0}\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c\to 1-0} 2\left(1-\sqrt{1-c}\right) = 2.$$

Обобщая этот пример, рассмотрим функцию $y = f(x)$, разрывную в точке b интервала $[a,\ b]$ и непрерывную на интервале $[a,\ c]$, где c – любая точка интервала $(a,\ b)$ (см. рис. 7.2).

Если при $c \to b$ слева определенный интеграл $\int_a^c f(x)dx$ стремится к конечному пределу, то этот предел называется *несобственным интегралом от разрывной функции* и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом,

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx. \qquad (7.4)$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *существует* или *сходится*. Если указанный предел не существует, то говорят, что интеграл *не существует* или *расходится.*

Аналогично, если функция $f(x)$ разрывна при приближении x справа к точке a, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a+0}\int_a^b f(x)dx, \text{ где } a < c < b. \qquad (7.5)$$

Наконец, если функция $f(x)$ разрывна в некоторой внутренней точке d интервала $[a,\ b]$, то мы разбиваем этот интервал на два интервала: $[a,\ d]$ и $[d,\ b]$. Если несобственные интегралы от данной функции существуют на каждом и этих интервалов, то сумма этих интегралов, по определению, называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на интервале $[a,\ b]$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx. \qquad (7.6)$$

Таким образом, из определений непосредственно видно, что несобственный интеграл от разрывной функции является не пределом интегральных сумм, а пределом определенного интеграла.

Пример 7.5. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$. График подынтегральной функции изображен на рис. 7.3.

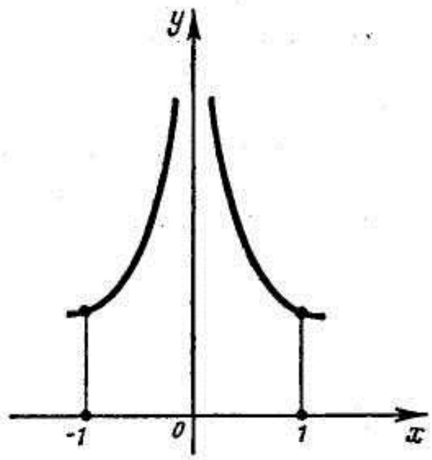


Рис. 7.3

Решение. Подынтегральная функция $\sqrt[3]{x^2}$ разрывна в точке x=0 $\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty\right)$. Рассмотрим интегралы $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ и $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$. Оба они существуют, причем $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=3$, $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=3$. Поэтому по определению существует интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}+\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=3+3=6.$$

Пример 7.6. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

Решение. Подынтегральная функция $1/x^2$ разрывна в точке x=0. поэтому, как и в примере 7.5, рассмотрим отдельно интегралы $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}$ и $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$. Легко убедиться в том, что оба эти интеграла не существуют. Следовательно, по определению не существует интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$. Заметим, что если бы мы действовали формально, применяя формулу Ньютона – Лейбница к интегралу $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$, то получили бы заведомо неверный результат $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2$. Этот результат неверен, так как интеграл от положительной функции на интервале $[-1,\ 1]$ не может быть отрицательным. Ошибка произошла потому, что мы незаконно применили формулу Ньютона – Лейбница, которая была выведена в предположении непрерывности подынтегральной функции на интервале интегрирования. В нашем же случае функция $1/x^2$ имеет в точке x=0 бесконечный разрыв.

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

8.1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее искомую функцию одной или нескольких переменных эти переменные и производные различных порядков данной функции.

Простейший пример дифференциального уравнения дает задача о нахождении первообразной *F(x)* для заданной функции $f(x)$, поскольку ее можно рассматривать как задачу о нахождении функции $F(x)$, удовлетворяющей уравнению $F'(x) = f(x)$.

В общем случае дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$G\left(x,\, y,\, y',\, ...,\, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (8.1)$$

где G — некоторая функция от n + 2 переменных, $n \geq 1$, при этом порядок n старшей производной, входящей в запись уравнения, называется *порядком* дифференциального уравнения. Например, задача о нахождении первообразной приводит к дифференциальному уравнению первого порядка, уравнение

$$x^2\left(y'''\right)^4 - x\left(y'\right)^5 + 8 = 0$$

— третьего порядка и т.п.

Дифференциальное уравнение n-го порядка называется *разрешенным относительно старшей производной,* если оно имеет вид

$$y^{(n)} = F\left(x,\, y,\, y',\, ...,\, y^{(n-1)}\right)$$

где F — некоторая функция от n + 1 переменной.

Решением дифференциального уравнения (8.1) называется такая функция $y = y(x)$, которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество. Например, функция $y = \sin x$ является решением уравнения $y'' + y = 0$, так как $(\sin x)'' + \sin x = 0$ для любых x.

Задача о нахождении решения некоторого дифференциального уравнения называется *задачей интегрирования* данного *дифференциального уравнения.* График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Общим решением дифференциального уравнения (8.1) n-го порядка называется такое его решение

$$y = \varphi\left(x,\, C_1,\, ...,\, C_n\right), \qquad (8.2)$$

которое является функцией переменной x и n произвольных независимых постоянных C_1, C_2, ..., C_n. (Независимость постоянных означает отсутствие какихлибо соотношений между ними.)

Пример 8.1. Из статистических данных известно, что для рассматриваемого региона число новорожденных и число умерших за единицу времени пропорциональны численности населения с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2 соответственно. Найти закон изменения численности населения с течением времени. (Описать протекание демографического процесса.)

Решение. Пусть $y = y(t)$ — число жителей региона в момент времени t. Прирост населения Δy за время Δt равен разности между числом родившихся и умерших за это время, т.е.

$$\Delta y = k_1 y \Delta t - k_2 y \Delta t,$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky,$$

где $k = k_1 - k_2$. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем уравнение

$$y' = ky, \tag{8.3}$$

представляющее математическую модель демографического процесса.

Решая это уравнение, получаем закон изменения численности населения

$$y = Ce^{kt}, \tag{8.4}$$

где C – постоянная, определяемая начальными условиями (численность населения в начальный момент времени).

8.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется дифференциальным уравнением I порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными,* если оно может быть представлено в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \tag{8.5}$$

или в виде

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0, \tag{8.6}$$

где $f(x)$, $M(x)$, $P(x)$ — некоторые функции переменной x; $g(y)$, $N(y)$, $Q(y)$ — функции переменной y.

Для решения такого уравнения его следует преобразовать к виду, в котором дифференциал и функции переменной x окажутся в одной части равенства, а переменной y — в другой. Затем проинтегрировать обе части полученного равенства. Например, из (8.5) следует, что $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ и $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$.

Выполняя интегрирование, приходим к решению уравнения (8.5).

Пример 8.2. Решить уравнение $\sqrt{y^2+1}dx = xy\,dy$.

Решение. Разделив левую и правую части уравнения на выражение $x\sqrt{y^2+1}$ (при $x \neq 0$), приходим к равенству $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}$. Интегрируя, получим

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} \tag{8.7}$$

или

$$\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C_1 \tag{8.8}$$

(так как интеграл в левой части (8.7) табличный, а интеграл в правой части может быть найден, например, заменой $\sqrt{y^2+1} = t$, $y^2+1 = t^2$, $2y\,dy = 2t\,dt$ и $\int \dfrac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \int \dfrac{tdt}{t} = \int dt = t + C_1 = \sqrt{y^2+1} + C_1$).

решение (8.8) перепишем в виде $x = \pm e^{C_1} e^{\sqrt{y^2+1}}$ или $x = Ce^{\sqrt{y^2+1}}$, где $C = \pm e^{C_1}$.

8.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным,* если оно может быть представлено в виде

$$y' = g\left(y/x\right), \tag{8.9}$$

где g — некоторая функция (одной переменной).

Например, уравнение $y' = \dfrac{y}{x} \cos\ln\dfrac{y}{x}$ — однородное.

Понятие однородного дифференциального уравнения связано с однородными функциями. Функция $y = f\left(x,\, y\right)$ называете *однородной степени* k (по переменным x и y), если для произвольного числа α выполняется равенство

$$f\left(\alpha x,\ \alpha y\right) = \alpha^k f\left(x,\, y\right). \tag{8.10}$$

Рассмотрим теперь способ решения дифференциального уравнения (8.9). Убедимся, что введение в рассмотрение вспомогательной функции z от переменной x (замена переменной) $z = y/x$ позволяет свести это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, так как $y = zx$, то $y' = z'x + z$, поэтому уравнение (8.9) приобретает следующий вид

$$z'x + z = g\left(z\right),$$

откуда получим, что

$$\frac{dz}{g\left(z\right) - z} = \frac{dx}{x}. \tag{8.11}$$

Пример 8.3. Решить уравнение

$$y' = \frac{x+2y}{x}. \tag{8.12}$$

Решение. Так как $\dfrac{x+2y}{x}=1+2y/x$, то уравнение (8.12) имеет вид (8.9) при $g(y/x)=1+2y/x$. Положим $z=y/x$. Тогда $g(z)-z=1+2z-z=1+z$ и, согласно (8.11), имеем

$$\frac{dz}{z+z}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя почленно последнее равенство, получаем

$$\ln|1+z|=\ln|x|+C_1,$$

Откуда $|1+z|=e^{C_1}|x|$ или $1+z=Cx$, где $C=\pm e^{C_1}$. Возвращаясь к первоначальным переменным, получим $1+\dfrac{y}{x}=Cx$, откуда $y=(Cx-1)x$.

8.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называем *линейным,* если оно имеет вид

$$y'+f(x)y=g(x), \tag{8.13}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые (непрерывные) функции переменной x. В случае, когда функция $g(x)$ тождественно равна нулю, уравнение называется *однородным,* в противном случае — *неоднородным.*

Рассмотрим один из возможных способов решения уравнения (8.13): будем искать решение в виде $y = u(x)v(x)$ (тем самым искомыми становятся функции $u(x)$ и $v(x)$, одна из которых может быть выбрана произвольно, а другая — должна определяться из уравнения (8.13).

Так как $y'=u'v+uv'$, то из (8.13) следует $u'v+uv'+f(x)uv=g(x)$, или

$$vu'+u\left(v'+f(x)v\right)=g(x). \tag{8.13}$$

Найдем сначала какое-либо частное решение $v=v(x)$ уравнения

$$v'+f(x)v=0. \tag{8.15}$$

Тогда (см. (8.14)) функция $u = u(x)$ — решение уравнения

$$vu'=g(x). \tag{8.16}$$

Тем самым решение исходного уравнения (8.13) сводится решению двух уравнений с разделяющимися переменными (см. (8.15) и (8.16)).

Пример 8.4. Решить уравнение

$$xy'\text{-}2y = 2x^4. \tag{8.17}$$

Решение. Разделив левую и правую части (8.17) на x, приходим к линейному неоднородному уравнению:

$$y'-\frac{2}{x}y=2x^3.$$

Пусть $y = uv$, т.е. $y' = u'v + uv'$, тогда уравнение (8.17) примет вид $u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = 2x^3$, или

$$u'v + u\left(v' - \frac{2}{3}v\right) = 2x^3. \qquad (8.18)$$

Положим $v' - \frac{2}{x}v = 0$ или $\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}v$, откуда $\frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}$. Проинтегрировав, найдем какое-либо частное решение этого уравнения, например, при C=0 $\ln|v| = 2\ln|x|$ и $v = x^2$. При $v = x^2$ равенство (8.18) обратится в уравнение $u'x^2 = 2x^3$, или $\frac{du}{dx} = 2x$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получаем $u = x^2 + C$. Тогда окончательно имеем $y = uv = \left(x^2 + C\right)x^2 = x^4 + Cx^2$.

8.5. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

В некоторых случаях решение дифференциального уравнения второго порядка может быть сведено к последовательному решению двух дифференциальных уравнений первого порядка (тогда говорят, что данное дифференциальное уравнение *допускает понижение порядка).*

Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'' = f(x),$$

то оно решается последовательным интегрированием (см. пример 8.1).

Если в запись уравнения не входит искомая функция y (x), т.е. оно имеет вид

$$G(x,\ y',\ y'') = 0,$$

то такое уравнение можно решить, найдя сначала вспомогательную функцию $z = y''$.

Пример 8.5. Решить уравнение $xy'' + y' = 0$.

Решение. Положим $z = y'$. Тогда $y'' = z'$ и исходное уравнение принимает вид $xz' + z = 0$.

Откуда $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$. Интегрируя, приходим к решению $z = C_1/x$. Возвращаясь к первоначальной функции, получаем уравнение $y' = C_1/x$, или $dy = \frac{C_1 dx}{x}$, решая которое окончательно имеем $y = C_1\ln|x| + C_2$.

Если в уравнение не входит переменная x, т.е. оно имеет вид

$$G(y,\ y',\ y'') = 0,$$

то порядок уравнения можно понизить, если за независимую переменную взять y, а за неизвестную функцию - $z = z(y) = y'$.

Пример 8.6. Решить уравнение $2yy'' = (y')^2 + 1$.

Решение. Положим $z = z(y) = y'$. Тогда $y'' = \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = z'z$, и исходное уравнение принимает вид

$$2yzz' = z^2 + 1.$$

Данное уравнение – с разделяющимися переменными:

$\dfrac{2zdz}{z^2+1} = \dfrac{dy}{y}$, или $\dfrac{d\left(z^2+1\right)}{z^2+1} = \dfrac{dy}{y}$. Выполняя интегрирование, получаем $\ln\left(z^2+1\right) = \ln|y| + C$, или, полагая $C = \ln C_1$, $z = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$. Так как $z = y'$, то приходим к следующему уравнению относительно функции $y(x)$

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx.$$

Выполняя интегрирование, получаем $\pm\sqrt{C_1 y - 1} = \dfrac{C_1}{2}(x + C_2)$, или

$$C_1 y - 1 = \frac{C_1^2}{4}(x + C_2)^2.$$

8.6. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейное дифференциальной уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + py' + qy = r(x), \tag{8.19}$$

где p, q — некоторые действительные числа, $r(x)$ — некоторая функция. Если $r(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{8.20}$$

называется *однородным;* в противном случае при $r(x) \neq 0$ уравнение (8.19) называется *неоднородным.*

Можно доказать, что существует единственное решение уравнения (8.19), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = z_1$, $y'(x_0) = z_2$, где x_0, z_1, z_2 — некоторые (действительные) числа.

Рассмотрим сначала **решение линейного однородного уравнения** (8.20) с постоянными коэффициентами.

Напомним, что линейной комбинацией функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ с коэффициентами C_1 и C_2 называется выражение вида $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Если линейная комбинация функций $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ равна нулевой функции только тогда, когда коэффициенты C_1 и C_2 равны нулю, то функции y_1 и y_2 называются *линейно независимыми,* в противном случае — *линейно зависимыми.*

Теорема 1. *Если* $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — *линейно независимые частные решения уравнения* (8.20), *то общее решение этого уравнения является линейной комбинацией этих частных решений, т.е. имеет* вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{8.21}$$

для некоторых действительных чисел C_1 *и* C_2.

Итак, чтобы найти общее решение уравнения (8.20), надо знать два его частных решения y_1 и y_2.

Будем искать решение уравнения (8.20) в форме

$$y = e^{\lambda x}, \tag{8.22}$$

где λ — некоторое (действительное) число (если такое существует). Так как $\left(e^{\lambda x}\right)'' + p\left(e^{\lambda x}\right)' + qe^{\lambda x} = \left(\lambda^2 + p\lambda + q\right)e^{\lambda x}$, то функция (8.22) является решением уравнения (8.20), если число λ есть корень уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \tag{8.23}$$

которое называется *характеристическим уравнением* исходного уравнения (8.20).

Описание решений уравнения (8.20) зависит от того, имеет ли соответствующее характеристическое уравнение (8.23) два различных корня, один корень или не имеет действительных корней. Справедлива теорема.

Теорема 2.

1. *Пусть характеристическое уравнение* (8.23) *уравнения* (8.20) *имеет действительные корни* λ_1 *и* λ_2, *причем* $\lambda_1 \neq \lambda_2$. *Тогда общее решение уравнения* (8.20) *имеет вид*

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \tag{8.24}$$

где C_1 *и* C_2 *— некоторые числа.*

2. *Если характеристическое уравнение* (8.23) *имеет один корень* λ *{кратности* 2), *то общее решение уравнения* (8.20) *имеет вид*

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}, \tag{8.25}$$

где C_1 *и* C_2 *— некоторые числа.*

3. *Если характеристическое уравнение* (8.23) *не имеет действительных корней, то общее решение уравнения* (8.20) *имеет вид*

$$y = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \tag{8.26}$$

где $\alpha = -p/2$, $\beta = \sqrt{q - p^2/4}$, C_1, C_2 *- некоторые числа.*

Пример 8.7. Найти частное решение следующих уравнений при указанных начальных условиях:

а) $y'' - 3y' + 2y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 4$;

б) $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;

в) $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

Решение

а) Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, находим его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Тогда общее решение данного уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Найдем такие значения постоянных C_1 и C_2, при которых выполняются заданные начальные условия. Так как $y(0) = C_1 + C_2$ и $y'(0)=C_1+2C_2$, то постоянные C_1 и C_2 находим, решая систему

$$\begin{cases} C_1 + \ \ C_2 = 3, \\ C_1 + 2C_2 = 4. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = 2$, $C_2 = 1$.

По теореме о существовании и единственности решения уравнения вида (8.33) найденное частное решение $y = 2e^x + e^{2x}$ — искомое.

б) Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Согласно п. 2 теоремы 2 общее решение дифференциального уравнения (12.34) имеет вид $y=(C_x+C_2x)e^x$. Так как $y(0)=1$, то $C_1=1$ и, поскольку $y'=y+C_2e^x$ и $y'(0)=0$, то $C_2=$—1. Таким образом, окончательно получаем частное решение

$$y = (1-x)e^x.$$

в) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ не имеет действительных корней. В этом случае согласно п. 3 теоремы общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x \sin x + C_2 e^x \cos x \quad (\alpha = \beta = 1).$$

Так как $y(0)=1$, то $C_2=1$. Найдем $y' = (C_1 - C_2)e^x \sin x + (C_1 - C_2)e^x \cos x$. Учитывая, что $y'(0) = 1$, получим $C_1 = 0$. Таким образом, приходим к частному решению $y = e^x \cos x$.

Перейдем теперь к **решению линейного неоднородного уравнения** (8.19) с постоянными коэффициентами.

Это уравнение может быть, в частности, решено *методом вариации произвольных постоянных,* который состоит в следующем. Сначала находится общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ однородного уравнения (8.20), имеющего ту же левую часть, что и исходное неоднородное уравнение (8.19). Затем решение уравнения (8.19) находится в виде $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, т.е. предполагается, что постоянные C_1 и C_2 являются функциями независимой переменной x. При этом функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ могут быть найдены как решения системы

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = r. \end{cases} \tag{8.27}$$

Пример 8.8. Решить уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = e^x. \tag{8.28}$$

Решение. Решая соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{8.29}$$

находим

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^{2x}.$$

Полагая теперь, что C_1 и C_2 — функции переменной x, найдем первые производные этих функций, решая систему (8.27)

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0, \\ C_1' e^x + C_2' 2e^{2x} = e^x. \end{cases}$$

Найдем $C_1' = -1,\ C_2' = e^{-x}$. Полученные дифференциальные уравнения — с разделяющимися переменными. Решая эти уравнения, получаем $C_1 = -x + C_3$, $C_2 = -e^{-x} + C_4$, где C_3, C_4 — некоторые постоянные. Таким образом, окончательно решение равнения имеет вид

$$y = \left(-x + C_3\right)e^x + \left(-e^{-x} + C_4\right) =$$

$$= C_3 e^x + C_4 e^{2x} + \left(-x - 1\right)e^x.$$

Теорема 3. *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения* (8.19) *равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения* (8.20) *и частного решения исходного неоднородного уравнения* (8.19).

Следует отметить, что метод вариации произвольных постойных достаточно сложен, поэтому в ряде случаев целесообразно использовать другие методы решения, основанные на теореме 3. Сначала, как и при методе вариации произвольных постоянных, находится общее решение однородного дифференциального уравнения (8.20), а затем отыскивается частное решение неоднородного уравнения (8.19). При этом вид частного решения устанавливается по виду правой части уравнения (8.19), задача сводится к отысканию коэффициентов этого частного решения.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть правая часть уравнения (8.19) является многочленом степени *m,* т.е. имеет вид

$$r\left(x\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m,$$

где $a_{0,}\ a_1,\ \ldots,\ a_m$ — действительные числа и $a_m \neq 0$. Тогда частное решение уравнения (8.19) следует искать в виде

$$u\left(x\right) = \left(C_0 + C_1 x + \ldots + C_m x^m\right)x^s,$$

т.е. в виде произведения многочлена той же степени m на x^s, где $s = 0$, если $q \neq 0$ (см. (8.23)), $s = 1$, если $q = 0$ и $p \neq 0$ и $s = 2$, если $p = q = 0$. (Другими словами, показатель степени s равен кратности значения $x = 0$ как корня характеристического многочлена (8.23).)

Пример 8.9. Найти частное решение уравнения

$$y'' - 3y' = 1 + 6x. \tag{8.30}$$

Решение. По сформулированному правилу частное решение уравнения (8.30) следует искать в виде

$$u\left(x\right) = \left(C_0 + C_1 x\right)x. \tag{8.31}$$

Найдем значения параметров C_0 и C_1 в данном выражении для $u(x)$. Дифференцируя (8.31), получаем

$$u'(x)=C_0+2C_1x, \qquad u''(x)=2C_1.$$

Так как $u(x)$ — решение уравнения (8.30), то значения C_0 и C_1 должны быть такими, что равенство $u''-3u'=1+6x$, т.е.

$$2C_1-3(C_0+2C_1x)=1+6x,$$

или

$$(2C_1-3C_0)-6C_1x=1+6x, \tag{8.32}$$

будет удовлетворяться тождественно, т.е. при всех x.

Поэтому уравнение (8.32) равносильно системе

$$\begin{cases} 2C_1-3C_0=1, \\ -6C_1 \qquad = 6. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $C_0=C_1=-1$, т.е. искомое частное решение уравнения (8.30)

$$u(x)=-x-x^2.$$

2. Пусть правая часть уравнения (8.19) имеет вид

$$r(x)=Ae^{\alpha x},$$

где α и A — некоторые действительные числа.

Тогда частное решение уравнения (8.19) следует искать в виде

$$u(x)=C_0x^se^{\alpha x}, \tag{8.33}$$

где показатель степени s равен кратности значения $x=\alpha$ как корня характеристического многочлена (8.23).

Пример 8.10. Найти частные решения уравнений:

а) $y''-3y'+2y=2e^{3x}$; б) $y''-3y'+2y=e^{2x}$;

в) $y''-2y'+y=6e^x$.

Решение.

а) В данном случае $\alpha=3$ и поскольку такого значения нет среди корней $(\lambda_1=1,\ \lambda_2=2)$ характеристического равнения $\lambda^2-3\lambda+2=0$, то s=0. Таким образом, частное решение уравнения (а) будем искать в виде $u=C_0e^{3x}$.

Тогда $u'=3C_0e^{3x}$, $u''=9C_0e^{3x}$.

Подставляя выражения u'', u', u в уравнение (а), приходим к равенству

$$9C_0e^{3x}-9C_0e^{3x}+2C_0e^{3x}=2e^{3x},$$

или

$$2C_0e^{3x}=2e^{3x},$$

которое должно удовлетворяться тождественно. Поэтому $C_0=1$ и искомое частное решение $u=e^{3x}$.

б) Здесь $\alpha=2$, и это значение совпадает с одним из двух различных корней $(\lambda_1=1,\ \lambda_2=2)$ соответствующего характеристического уравнения. Поэтому s=1, и частное решение уравнения (б) будем искать в виде $u=C_0xe^{2x}$.

Подставляя выражения u и ее производных в уравнение (б), получим (после преобразований) $u=xe^{2x}$.

в) В данном случае $\alpha=1$. Одновременно корнями характеристического уравнения $\lambda^2-2\lambda+1=0$ уравнения (в) являются $\lambda_1=\lambda_2=1$ (т.е. значение $\lambda=1$ является корнем кратности 2). Поэтому s = 2, и частное решение уравнения (в) следует искать в виде $u=C_0x^2e^{2x}$.

Представляя выражение для u и ее производных в уравнение (в), получим после преобразований $u = 3x^2e^x$.

3. Пусть правая часть уравнения (8.19) имеет вид

$$r(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x,$$

где a, b, β — некоторые действительные числа и $\beta\neq0$.

Тогда частное решение уравнения (8.19) следует искать в виде:

$$u(x)=x^s\left(C_0\cos\beta x+C_1\sin\beta x\right),$$

где s=1, если одновременно выполнены условия p=0 (см. 8.37), $q > 0$, $\beta=\sqrt{q}$ и s = 0 в остальных случаях. (Условия случая s=1 равносильны требованию, чтобы значение β в выражении $r(x)$ было таково, что комплексное число $i\beta$ было одним из корней характеристического уравнения (8.19).)

Пример 8.11. Найти частное решение уравнения

$$y''-3y'+2y=\sin x. \tag{8.34}$$

Решение. По сформулированному правилу частное решение в данном случае следует искать в виде

$$u=C_0\cos x+C_1\sin x.$$

Найдем $u'=-C_0\sin x+C_1\cos x$, $u''=-C_0\cos x-C_1\sin x$.

Подставляя выражения *u'', u', u в* уравнение (8.34), приходим к равенству

$$\left(-3C_1+C_0\right)\cos x+\left(-C_1+3C_0+2C_1\right)\sin x=\sin x,$$

которое должно удовлетворяться тождественно.

Учитывая, что $x\equiv0\cdot\cos x+1\cdot\sin x$, получим систему:

$$\begin{cases}-3C_1+C_0 &=0,\\ C_1+3\mathrm{C}_0 &=1.\end{cases}$$

откуда C_0 = 0,3, C_1 = 0,1 и, следовательно, искомое выражение имеет вид $u=0{,}3\cos x+0{,}1\sin x$.

Рассмотренные случаи различных выражений правой части уравнения (8.19) являются частными случаями функции вида

$$r(x)=e^{\alpha x}\left(f(x)\cos\beta x+g(x)\sin\beta x\right), \tag{8.35}$$

где $f(x)$, $g(x)$ — многочлены (с действительными коэффициентами);

α, β — некоторые (действительные) числа.

Можно доказать, что частное решение уравнения (8.19) с правой частью (8.35) следует искать в виде

$$u=x^se^{\alpha x}\left(v(x)\cos\beta x+w(x)\sin\beta x\right), \tag{8.36}$$

где s равно кратности корня $\alpha+i\beta$ характеристического многочлена (8.23); $v(x)$, $w(x)$ — многочлены, степень которых равна наибольшей из степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$ в выражении (8.35). Коэффициенты многочленов $v(x)$ и $w(x)$ находятся из системы линейных уравнений, получаемой после подстановки решения (8.36) и его производных в уравнение (8.19).

З а м е ч а н и е . Если правая часть $r(x)$ уравнения (8.19) является суммой некоторых функций, т.е.

$$r(x)=r_1(x)+r_2(x)+...+r_k(x),$$

то для нахождения частного решения такого уравнения достаточно сложить частные решения $u_i(x)$ уравнений

$$y''+py'+qy=r_i(x), \text{ где } i=1,\ 2,\ ...,\ k, \text{ т.е.}$$

$$u(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_k(x).$$

Пример 8.12. Решить уравнение

$$y''-3y'+2y=2e^{3x}+e^{2x}+\sin x. \tag{8.37}$$

Решение. Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения y''—$3y'$+$2y$=0. Получим (см. ***пример 8.8***) $\tilde{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$. Учитываем замечание (см. выше), и частное решение *u* дифференциального уравнения (8.37) будет равно сумме частных решений уравнений

$$y''-3y'+2y=2e^{3x}, \qquad y''-3y'+2y=e^{3x}, \qquad y''-3y'+2y=\sin x,$$

найденных в примерах 12.20 (а, б), 12.21, т.е.

$$u(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)=e^{3x}+xe^{2x}+0{,}3\cos x+0{,}1\sin x.$$

На основании теоремы 3 общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y=\tilde{y}+u=C_1e^x+C_2e^{2x}+e^{3x}+xe^{2x}+0{,}3\cos x+0{,}1\sin x.$$

8.7. Использование дифференциальных уравнений в экономической динамике

Дифференциальные уравнения находят достаточно широкое применение в моделях экономической динамики, в которых отражается не только зависимость переменных от времени, но и их взаимосвязь во времени.

Рассмотрим некоторые (простейшие) задачи макроэкономической динамики.

Задача 1. Пусть $y(t)$ — объем продукции некоторой отрасли, реализованной к моменту времени *t*. Будем полагать, что вся производимая отраслью продукция реализуется по некоторой фиксированной цене *p,* т.е. выполнено условие ненасыщаемости рынка. Тогда доход к моменту времени *t* составит $Y(t)=py(t)$.

Обозначим через $I(t)$ величину инвестиций, направляемых на расширение производства. В м о д е л и е с т е с т в е н н о г о р о с т а полагают, что скорость выпуска продукции (акселерация) пропорциональна величине инвестиций, т.е.

$$y'(t) = lI(t). \qquad (8.38)$$

(Здесь мы пренебрегаем временем между окончанием производства продукции и ее реализацией, т.е. считаем, что инвестиционный лаг равен нулю.)

Полагая, что величина инвестиций $I(t)$ составляет фиксированную часть дохода, получим

$$I(t) = mY(t) = mpy(t), \qquad (8.39)$$

где коэффициент пропорциональности m (так называемая норма инвестиций) — постоянная величина, $0 < m < 1$.

Подставляя последнее выражение (8.39) для $I(t)$ в (8.38), приходим к уравнению

$$y' = ky, \qquad (8.40)$$

где $k = mpl$.

Полученное дифференциальное уравнение — с разделяющимися переменными (см. п. 8.2). Решая его, приходим к функции $y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}$, где $y_0 = y(t_0)$.

Заметим, что уравнение (8.40) описывает также рост народонаселения, динамику роста цен при постоянной инфляции, процесс радиоактивного распада и др.

На практике условие насыщаемости рынка может быть принято только для достаточно узкого временного интервала. В общем случае кривая спроса, т.е. зависимость цены p реализованной продукции от ее объема y является убывающей функцией $p = p(y)$ (с увеличением объема произведенной продукции ее цена падает в результате насыщения рынка). Поэтому модель роста в условиях конкурентного рынка примет вид

$$y' = mlp(y)y, \qquad (8.41)$$

оставаясь по-прежнему уравнением с разделяющимися переменными.

Так как все сомножители в правой части уравнения (8.41) положительны, то $y'>0$, и это уравнение описывает возрастающую функцию $y(t)$. При исследовании функции $y(t)$ на выпуклость естественно используется понятие эластичности функции. Действительно, из (8.41) следует, что

$$y'' = mly'\left(\frac{dp}{dy}y + p\right).$$

Напомним, что эластичность спроса (относительно цены) определяется формулой $E_p(y) = \frac{p}{y}\frac{dy}{dp}$. Тогда выражение для y'' можно записать в виде

$$y'' = mly'p\left(\frac{1}{E_p(y)} + 1\right).$$

и условие $y'' = 0$ равносильно равенству $E_p(y) = -1$.

Таким образом, если спрос эластичен, т.е. $\left|E_p\left(y\right)\right|>1$ или $E_p(y)$ < -1, то y''>0 и функция $y\left(t\right)$ выпукла вниз; в случае, если спрос не эластичен, т.е. $\left|E_p\left(y\right)\right|<1$, или — 1 < $E_p(y)$ < 1, то y''< 0 и функция $y\left(t\right)$ выпукла вверх.

Пример 8.13. Найти выражение для объема реализованной продукции $y=y\left(t\right)$, если известно, что кривая спроса $p\left(y\right)$ задается уравнением $p\left(y\right)=2-y$, норма акселерации $1/l=2$, норма инвестиций m = 0,5, $y(0)$ = 0,5.

Решение. Уравнение (8.41) в этом случае принимает вид

$$y'=\left(2-y\right)y,$$

или

$$\frac{dy}{\left(2-y\right)y}=dt.$$

Выполняя почленное интегрирование, получаем

$$\ln\left|\frac{y-2}{y}\right|=-2t+C_1,$$

или

$$\frac{y-2}{y}=Ce^{-2t}, \qquad (8.42)$$

где $C=\pm e^{C_1}$.

Учитывая, $y\left(0\right)=0{,}5$, получаем, что $C=-3$. Выражая теперь y из (8.42), окончательно имеем

$$y=\frac{2}{1+3e^{-2t}}.$$

График данной функции схематично изображен на рисунке 8.1. В данном случае эластичность спроса задается функцией $E_p\left(y\right)=\dfrac{y-2}{y}$ и условие $E_p\left(y\right)=\dfrac{p}{y}\dfrac{dy}{dp}=\dfrac{y-2}{y}$, определяющее положение точки перегиба на кривой, дает y=1.

Кривая, изображенная на рис. 8.1, называется *логистической.* Подобные кривые описывают процесс распространения информации (рекламы), динамику эпидемий, процесс размножения бактерий в ограниченной среде и др.

Задача 2. Доход $Y\left(t\right)$, полученный к моменту времени t некоторой отраслью, является суммой инвестиций $I\left(t\right)$ и величины потребления $C\left(t\right)$, т.е.

$$Y\left(t\right)=I\left(t\right)+C\left(T\right). \qquad (8.43)$$

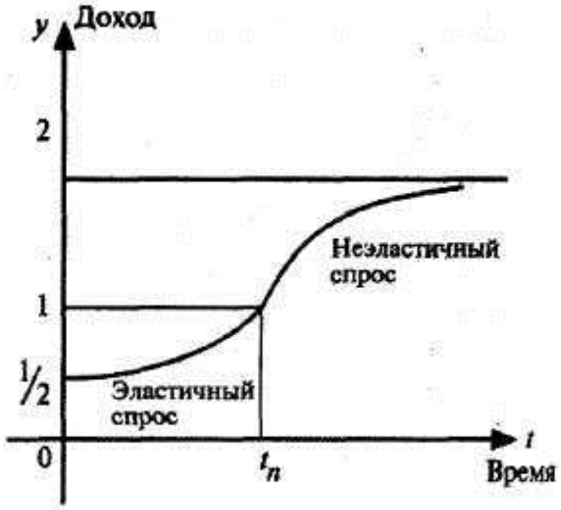


Рис. 8.1

Как и ранее в модели естественного роста, будем предполагать, что скорость увеличения дохода пропорциональна величине инвестиций, т.е.

$$bY'(t) = I(t), \tag{8.44}$$

где b — коэффициент капиталоемкости прироста дохода (что равносильно (8.38) при постоянной цене на продукцию p и $l = 1/(pb)$).

Рассмотрим поведение функции дохода $Y(t)$ в зависимости от функции $C(t)$.

Пусть $C(t)$ представляет фиксированную часть получаемого дохода: $C(t) = (1-m)Y(t)$, где m — норма инвестиций (см. задачу 1). Тогда из (8.43) и (8.44) получаем

$$Y' = \frac{m}{b}Y, \tag{8.45}$$

что равносильно уравнению (8.40) при $p = const$.

В ряде случаев вид функции потребления $C(t)$ бывает известен (из некоторых дополнительных соображений).

Пример 8.14. Найти функцию дохода $Y = Y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C = 2t$, коэффициент капиталоемкости прироста дохода $b = 1/2$, $Y(0) = 2\,2$.

Решение. Из соотношений (8.43) и (8.44) имеем уравнение

$$Y(t) = \frac{1}{2}Y'(t) + 2t,$$

т.е. функция дохода удовлетворяет линейному неоднородному уравнению первого порядка. Для его решения воспользуемся методом, описанным в п.8.6: будем искать решение в виде $Y(t) = u(t)v(t)$.

Тогда имеем $u(t)=2te^{-2t}+e^{-2t}+C$, $v(t)=e^{2t}$. Значение постоянной C находим из начальных условий: поскольку $Y(0)=u(0)v(0)=2$, то C=1. Окончательно имеем $Y(t)=2t+e^{2t}+1$.

Список литературы

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969.

2. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1966.

3. Кременр Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Н.Ш. Кремер и др.]; под ред. Проф. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008. – 479 с. – (Серия «Золотой фонд российских учебников»).

4. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. и др. Сборник задач по высшей математике. Ч. 1, 2. М.: Айрис-пресс, 2003. - 576 с.: ил.

5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.

6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 288 с.: ил.

7. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Ч. 1,2. - М.: Высшая школа, 1978. - 712 с.

Кулешова Ирина Ивановна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть II

Методическое пособие для студентов дневной формы обучения направления «Экономика»

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 20.12.13. Формат 60х84/16.

Усл. печ. л. 5,56. Тираж 50 экз. Зак. 131224. Рег. № 76.

Отпечатано в РИО Рубцовского индустриального института

658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.